المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

11

كتاب الطالب

الرياضيات

الصف الحادي عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات   مهند إبراهيم العسود

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2021/3)، تاريخ 2021/6/10 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2021/113) تاريخ 2021/6/30 م بدءًا من العام الدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 362 - 3

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2053)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات الصف الحادي عشر الفرع العلمي: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول)/ المركز الوطني لتطوير المناهج. -ط2؛ طبعة مزيدة ومنقحة.- عمان: المركز، 2022

(193) ص.

ر.إ.: 2022/4/2053

الواصفات: / الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)	1442 هـ / 2021 م
أعيدت طباعته	1443 هـ / 2022 م

المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاريّ، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً وأعدها وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنيّة؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

وقــد روعي في إعداد كتــب الرياضيات للمرحلة الثانويــة تضمينها الموضوعات الرياضيــة الأكثر أهمية واســتخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغية إعداد الطلبة للدراسة الجامعيّة إعدادًا جيّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. كما حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائيّة متدرجة تتيح للطلبة فرصة تعلمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

كما روعي تقديم الموضوعــات بطريقة منظمة جاذبة ومدعمة بتمثيلات بيانية ومزوّدة بإرشـــادات تعين الطلبة على مواصلة تعلمهم بسلاســة مــن دون تعثر؛ فهي تذكرهم بالخبرات التعليميّة التي امتلكوها ســابقًا وتســاعدهم على ربط الموضوعات الجديدة ببعضها ربطًا وثيقًا. إضافة إلى صلة كثير من أمثلتها ومســائلها بسياقات حياتيّة تحفِّز الطلبة على تعلّم الرياضيّات بشغف وتجعله ذا معنى.

ولأنّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائيّة فقد تضمّن كتابا الطالــب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسيّ بصفته مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافيّة، ويحقّق العدالة في التعلّم.

ونحــن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة
1

الاقترانات المتشعّبة والمتباينات
Piecewise Functions and Inequalities

ما أهمّية هذه الوحدة؟

تُستعمل الاقترانات المتشعّبة واقترانات القيمة المطلقة؛ لنمذجة مواقف حياتية كثيرة، مثل حساب أثمان المياه والكهرباء وفق شرائح الاستهلاك المختلفة، أو حساب ضريبة الدخل تبعًا لشرائح الدخل المتعدّدة. وتُستعمل المتباينات والبرمجة الخطّية في نواحٍ اقتصادية كثيرة؛ لخفض التكاليف وزيادة الإنتاجية وتحقيق أكبر ربح ممكن.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- ✓ حل معادلات خطّية وتربيعية بمتغيّر واحد.
- ✓ حل أنظمة معادلات خطّية وغير خطّية بمتغيّرين.
- ✓ حل متباينات خطّية بمتغيّر واحد.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا.
- حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.
- تمثيل منطقة حلّ أنظمة متباينات خطّية بمتغيّرين.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (6 و 7) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

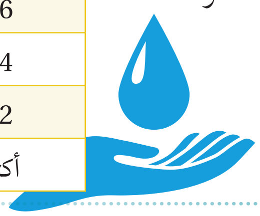
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

فكرة الدرس تعرّف الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا، وتحديد مجال كلّ منهما ومداه.

المصطلحات الاقتران المتشعّب، اقتران القيمة المطلقة، رأس الاقتران.

مسألة اليوم يُبيّن الجدول المجاور تعرفة ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك. كم تدفع أسرة استهلكت $42\ m^3$ من الماء؟

شرائح الاستهلاك مقرّبة إلى أقرب m^3	التعرفة JD/m^3
0 – 18	0.361
19 – 36	0.450
37 – 54	0.550
55 – 72	1.000
أكثر من 72	1.200



الاقتران المتشعب

أُلاحظ في المسألة السابقة، أنّه لا يُمكن كتابة معادلة واحدة بدلالة كمّية المياه المستهلكة x يمكن من خلالها حساب ثمن المياه لأي قِيَم x؛ لذا، نحتاج إلى معادلة خاصّة بكلّ واحدة من شرائح الاستهلاك.

يُسمّى الاقتران المعرّف بقواعد مختلفة عند أجزاء مجاله **اقترانًا متشعّبًا** (piecewise function).

مثال 1

إذا كان
$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & , -3\le x<1\\ x^2 & , x\ge 1\end{cases}$$

1 أُحدّد مجال $f(x)$

أُلاحظ أنّ الاقتران معرّف بالقاعدتين؛ الأولى $f(x) = -2x+1$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-3 \le x < 1$، والثانية $f(x) = x^2$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \ge 1$. إذن: مجال $f(x)$ هو الفترة $[-3 , \infty)$

2 أجد قيمة $f(-2)$.

بما أنّ $-3 < -2 < 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الأولى.

$f(x) = -2x + 1$	القاعدة الأولى
$f(-2) = -2(-2) + 1$	بتعويض $x = -2$
$= 5$	بالتبسيط

3 أجد قيمة $f(1)$.

بما أنّ $1 \leq 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الثانية.

$f(x) = x^2$	القاعدة الثانية
$f(1) = (1)^2$	بتعويض $x = 1$
$= 1$	بالتبسيط

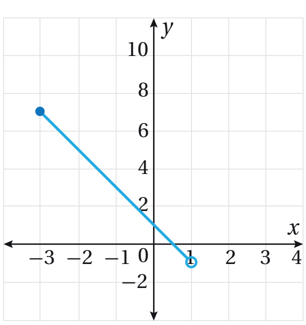
4 أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

الخطوة 1: أُمثّل $f(x) = -2x + 1$ عندما $-3 \leq x < 1$

أجد قيمة الاقتران $f(x) = -2x + 1$، عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$ كما في الجدول الآتي:

x	-3	1
$y = f(x) = -2x + 1$	7	-1
(x, y)	$(-3, 7)$	$(1, -1)$

أُعيّن النقطتين $(1, -1)$, $(-3, 7)$ في المستوى الإحداثي وأصل بينهما، وبما أنّ العدد (-3) يُحقّق المتباينة؛ أبدأ التمثيل بدائرة مغلقة عند النقطة $(-3, 7)$، أمّا العدد (1) فهو لا يُحقّق المتباينة؛ لذا، أُنهي التمثيل بدائرة مفرّغة عند النقطة $(1, -1)$.



الخطوة 2: أُمثّل $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$

منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$ هو جزء من منحنى قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى، أنشئ جدول قِيَم؛ لأرسم الجزء من منحنى القطع المكافئ، الذي يقع يمين العدد 1

x	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	1	4	9
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

أتذكّر

بما أنّ $f(x) = -2x + 1$ اقتران خطّي؛ لذا، تكفي نقطتان لتمثيله بيانيًّا.

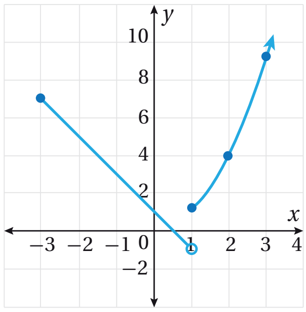
أتذكّر

يُمثّل الاقتران $f(x) = ax^2 + bx + c$ قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت قيمة $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت قيمة $a < 0$، ويُمكن إيجاد إحداثيَي رأس القطع المكافئ على النحو الآتي:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

أُعيّن النقاط $(1, 1), (2, 4), (3, 9)$ في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بخط منحنٍ، وبما أنّ العدد 1 يُحقّق المتباينة، إذن: أبدأ التمثيل بدائرة مغلقة عند $(1, 1)$.

بالنظر إلى التمثيل البياني؛ أُلاحظ أنّ مدى هذا الاقتران هو $y > -1$ ويُمكن التعبيرُ عنهُ بالفترة $(-1, \infty)$.



أتحقّق من فهمي

إذا كان
$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & , x<2 \\ 5 & , x=2 \\ 2x-1 & , x>2 \end{cases}$$:

a) أُحدّد مجال $f(x)$

b) أجد قيمة كلّ من $f(5)$، وَ $f(2)$

c) أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

يُمكنني أيضًا أن أجد قاعدة الاقتران المتشعّب؛ إذا أُعطيتُ تمثيله البياني، كما يتّضح من المثال الآتي.

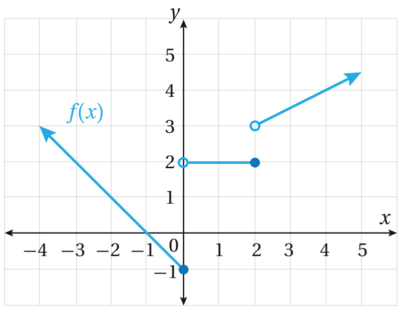
أتذكّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هو:
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
ومعادلته بصيغة الميل والمقطع هي:
$y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، و b المقطع y ومعادلته بصيغة الميل ونقطة هي:
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال 2

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أكتبُ الاقتران الذي يُمثّل كلّ جزء في التمثيل البياني.



الخطوة 1: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيسر في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر في التمثيل البياني هو اقتران خطي مقطعه مع المحور y هو -1 وميله -1 وباستعمال صيغة الميل والمقطع فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) = -x - 1$، ووجود دائرة مظلّلة عند النقطة $(0, -1)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(-\infty, 0]$ من مجال $f(x)$.

الخطوة 2: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأوسط في التمثيل البياني.

الجزء الأوسط في التمثيل البياني هو الاقتران الثابت $f(x) = 2$، ووجود دائرة مظلّلة عند $(2, 2)$، ودائرة مفرّغة عند $(0, 2)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(0, 2]$ من مجال $f(x)$.

الخطوة 3: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيمن في التمثيل البياني.

الجزء الأيمن في التمثيل البياني اقتران خطي ميله 0.5 وباستعمال صيغة الميل ونقطة، فإن قاعدة هذا الجزء هي: $f(x) - 4 = 0.5\ (x - 4)$، ويمكن إعادة كتابتها على الصورة: $f(x) = 0.5x + 2$، ووجود دائرة مفرغة عند $(2, 3)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(2, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن: تكون قاعدة هذا الاقتران المتشعّب على النحو الآتي:

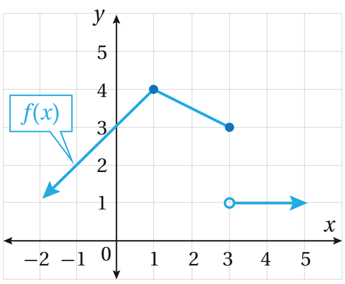
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , \ x \le 0 \\ 2 & , \ 0 < x \le 2 \\ 0.5x + 2 & , \ x > 2 \end{cases}$$

أتعلّم

بما أن المقطع y للجزء الأيمن من الاقتران لا يظهر في التمثيل البياني مثل الجزء الأيسر، لذا أبدأ بكتابة قاعدة هذا الجزء من التمثيل بصيغة الميل ونقطة أولًا، ثم أعيد كتابته بصورة الميل والمقطع.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



يُمكن نمذجة الكثير من المواقف الحياتية؛ باستعمال الاقترانات المتشعّبة.

مثال 3 : من الحياة

أجرة ساعة العمل الواحدة في إحدى الشركات 4 دنانير خلال أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع. وتدفع الشركة لكلّ ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجرة ساعة ونصف من ساعات العمل المعتاد. أكتبُ اقترانًا لحساب الأجرة الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجرة؛ تبعًا لعدد ساعات العمل.

الأجرة	عدد الساعات
$4x$	$0 \le x \le 40$
$4(40) + 6(x - 40)$	$x > 40$

أتعلّم

أجرة ساعة العمل الإضافي تساوي أجرة ساعة ونصف من العمل النظامي.

$4 \times 1.5 = 6$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x)=\begin{cases}4x & ,\ 0\le x\le 40\\ 6x-80 & ,\ x>40\end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

زادت شـركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأسـس الآتية: الرواتب التي تقلّ عن 400 دينار زيدت بنسـبة 20%، والرواتب مـن 400 دينار إلى أقلّ من 600 دينار زيدت بنسـبة 10%، والرواتب من 600 دينار وأكثر زيدت 50 دينارًا. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الراتب الجديد لموظّفي الشركة.

اقتران القيمة المطلقة

اقتـران القيمة المطلقة (absolute value function) وهو اقتـران يحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري، ومن أمثلته:

$$f(x)=2|x|+3\quad,\quad f(x)=|x^2-2x-3|\quad,\quad f(x)=\left|\frac{x+2}{2x-6}\right|$$

ومن أبسط اقترانات القيمة المطلقة الاقتران $f(x)=|x|$ ويُمكن كتابته بصورة اقتران متشعّب كما يأتي:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & ,\ x<0\\ x & ,\ x\ge 0\end{cases}$$

تُسـمّى إعادة كتابة أيّ اقتران قيمة مطلقة على صورة اقتران متشـعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة**.

أتذكّر

القيمة المطلقة لأيّ عدد حقيقـي x والتي يُرمز لها بالرمز $|x|$ تسـاوي بعده عـن الصفر علـى خط الأعداد، وبما أنّ البعد لا يكون سالبًا، فإنّ:

$|x|=x\ ,\ x\ge 0$

$|x|=-x\ ,\ x<0$

مثال:

$$\left|-\frac{1}{2}\right|=\left|+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

مثال 4

أعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

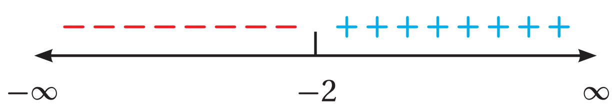
1 $\boldsymbol{f(x)=|2x+4|}$

الخطوة 1: أُساوي ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x+4=0$	بمساواة ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر
$2x+4-4=0-4$	بطرح 4
$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$	بالقسمة على 2
$x=-2$	بالتبسيط

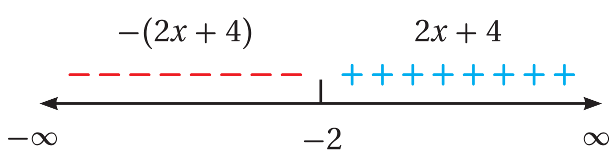
الخطوة 2 : أُعيّن صفر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبيه.

أُعيّن صفر المعادلة (-2) على خط الأعداد، ثمّ أُحدّد الإشـارة على جانبَيه، وذلك بتعويض أيّ قيمة أقلّ من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض سـالب دائمًا، ما يعني أنّ الإشـارة يسار -2 سـالبة. وأُعوّض أيّ قيمة أكبر من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض موجب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يمين -2 موجبة.



الخطوة 3 : أكتبُ قاعدتَي الاقتران حسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتبُ ما في داخل رمز القيمة المطلقة كما هو دون تغيير في الجزء الموجب، وأكتبُ في الجزء السالب ما في داخل رمز القيمة المطلقة مضروبًا في -1



الخطوة 4 : أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , \ x < -2 \\ 2x + 4 & , \ x \geq -2 \end{cases}$$

2 $\boldsymbol{f(x) = |\,2x^2 + 5x - 3|}$

الخطوة 1 : أُساوي ما في داخل القيمة المطلقة بالصفر، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ بمساواة ما في داخل رمز القيمة المطلقة بالصفر

$(2x - 1)(x + 3) = 0$ بالتحليل

$2x - 1 = 0 \quad or \quad x + 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = \frac{1}{2} \qquad\qquad x = -3$ بحلّ كلّ معادلة

أتعلّم

يأخـذ الاقتــران الخطّي يمين صفره إشارة معامل x نفسها، ويســار صفره عكس إشارة معامل x.

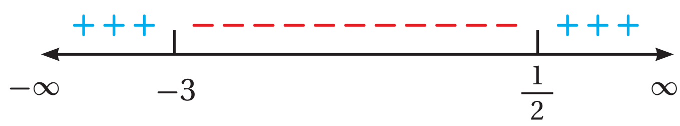
أتعلّم

يمكن أيضًا كتابة الاقتران $f(x)$ بالصورة الآتية:

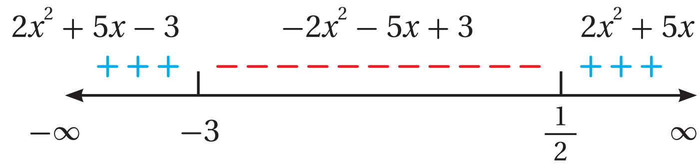
$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , \ x \leq -2 \\ 2x + 4 & , \ x > -2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أُعيّن صفرَي المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبي الصفرين وبينهما.

أُعيّن صفرَي المعادلة وهما -3 و $\frac{1}{2}$ على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبَيهما، وذلك باختيار قيمة من كلّ منطقة وتعويضها لأجد أنّ الإشارة يسار -3 ويمين $\frac{1}{2}$ موجبة، والإشارة بينهما سالبة.



الخطوة 3: أكتبُ قواعد الاقتران حسب إشارة يمين أصفار المعادلة ويسارها.



الخطوة 4: أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 & , \ x < -3 \\ -2x^2 - 5x + 3 & , \ -3 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 5x - 3 & , \ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

أتحقّق من فهمي

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

a) $f(x) = |-5x + 15|$

b) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا

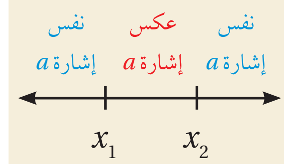
يتكوّن التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة الذي على الصورة $f(x) = a|mx+b|+c$، حيث $m \neq 0, a \neq 0$، من شعاعين على شكل حرف V متماثلين حول المحور $x = \frac{-b}{m}$،

ورأس الاقتران (function vertex) هو النقطة التي يصل عندها إلى أعلى قيمة أو أقلّ قيمة وإحداثياها $(\frac{-b}{m}, c)$.

يُمكن تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا باستعمال محور التماثل والرأس.

أفكّر

إذا كان للاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان هما x_1 و x_2؛ فإنّه يُمكن تحديد الإشارة على جانبَي الصفرين وبينهما كالآتي:



أتعلّم

يمكن كتابة الاقتران $f(x)$ بالصورة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+5x-3 & , x \le -3 \\ -2x^2-5x+3 & , -3 < x < \frac{1}{2} \\ 2x^2+5x-3 & , x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال 5

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، محدّدًا مجاله ومداه:

1) $f(x) = |x|$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

- أجد إحداثيي نقطة الرأس.

إحداثيّا نقطة الرأس	$\left(\frac{-b}{m}, c\right)$
بتعويض $b = 0, m = 1, c = 0$	$= \left(\frac{0}{1}, 0\right)$
بالتبسيط	$= (0,0)$

- معادلة محور التماثل $x = 0$ (المحور y)

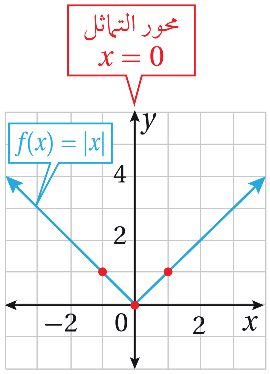
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أنّ محور التماثل $x = 0$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من 0 (مثلًا 1) وقيمة أخرى أقلّ من 0 (مثلًا -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-1	1
$f(x) = \|x\|$	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاثة بشكل V.



يُلاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $[0, \infty)$

أتعلّم

بما أنّ القيمة المطلقة لأيّ عدد لا يُمكن أن تكون سالبة؛ لذا، فإنّه عند أخذ القيمة المطلقة للاقتران، فهذا يعني عكس الجزء الواقع تحت المحور x حول المحور x $(y = 0)$.

2 $f(x) = -|x+2|+3$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيا نقطة الرأس $(-2, 3)$، ومعادلة محور التماثل $x = -2$

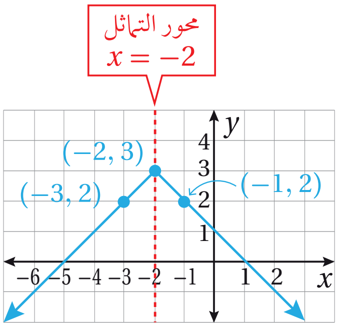
الخطوة 2: أُحدّد قيمتين للمتغيّر x حول محور التماثل، ثم أجد صورتيهما.

بما أنّ محور التماثل $x = -2$، أختار قيمة للمتغيّر x أكبر من -2 (مثلًا -1) وقيمة أخرى أقلّ من -2 (مثلًا -3)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-3	-1
$f(x) = -\|x+2\|+3$	2	2
(x, y)	$(-3, 2)$	$(-1, 2)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل النقطتين والرأس في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاثة بشكل V مقلوب.



ألاحظ من التمثيل البياني أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $(-\infty, 3]$.

أتعلّم

يكون اقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|mx+b|+c$، حيث $m \neq 0, a \neq 0$، مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت $a < 0$.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، محدّدًا مجاله ومداه:

a) $f(x) = |2x|$

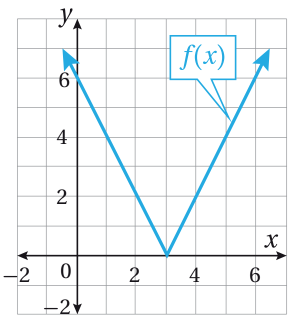
b) $f(x) = |2 - \frac{1}{2}x|$

ويُمكنني أيضًا تمثيل اقتران القيمة المطلقة لمقدار تربيعي؛ باستعمال مفهوم الانعكاس.

يُمكن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطّي؛ إذا أُعطي تمثيله البياني.

مثال 6

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



يظهر من الشكل أنّ التمثيل البياني هو لاقتران قيمة مطلقة خطّي؛ لأنّه على شكل حرف V؛ لذا، يُمكن كتابة قاعدته على الصورة $f(x) = a|mx + b| + c$. حيث m ميل المستقيم $y = mx + b$، وإحداثيا الرأس $(\frac{-b}{m}, c)$.

الخطوة 1: أجد ميل المعادلة الخطّية داخل رمز القيمة المطلقة.

أُلاحظ من التمثيل البياني أنّ الشعاع الأيمن يمرّ في النقطتين $(5, 4)$ و$(3, 0)$، ومنه فإنّ ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2$$

الخطوة 2: أجد إحداثيَي نقطة الرأس، ثم أُعوّض الميل وإحداثيَي نقطة الرأس في قاعدة الاقتران.

يظهر من التمثيل البياني أن النقطة $(3, 0)$ تمثل رأس التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة، إذن: يُمكن إيجاد قيمة b من الإحداثي x للرأس كما يأتي:

$x = \frac{-b}{m}$ الإحداثي x للرأس

$3 = \frac{-b}{2}$ بتعويض $m = 2$ و $x = 3$

$-b = 6$ بالضرب التبادلي

$b = -6$ بالقسمة على -1

وبتعويض إحداثيَي نقطة الرأس والميل وقيمة b في قاعدة الاقتران؛ فإنّ:

$$f(x) = a|2x - 6| + 0 \longrightarrow f(x) = a|2x - 6|$$

الخطوة 3: أجد قيمة a.

لإيجاد قيمة a؛ أُعوّض في قاعدة الاقتران إحداثيَي نقطة تقع على منحنى الاقتران (مثلًا $(0, 6)$)، وأحلّ المعادلة الناتجة.

$f(x) = a|2x - 6|$ قاعدة الاقتران

$6 = a|2(0) - 6|$ بتعويض $(0, 6)$

$6 = 6a$ بالتبسيط

$a = 1$ بالقسمة على 6

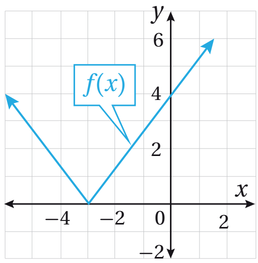
إذن: قاعدة الاقتران هي: $f(x) = |2x - 6|$.

أتعلّم

من السهل تعويض نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y لإيجاد قيمة a؛ لأنّ قيمة x فيها تساوي صفرًا.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة $f(x)$ الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & , x<-1 \\ 4x-3 & , -1\le x\le 4 \\ 2 & , x>4 \end{cases}$ ، فأجد كلًّا من:

1. 1) $f(-2)$
2. $f(-1)$
3. $f(0)$
4. $f(4)$
5. $f(8)$
6. $f(5)$

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

7. $f(x)=|3x-6|$
8. $f(x)=|x^2+9x+8|$
9. $f(x)=|7x-5|+3$
10. $f(x)=|5x^2+13x-6|-2$

أُمثّل كلاًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجالها ومداها:

11. $f(x)=\begin{cases} x+3 & , x<-2 \\ -2x-3 & , x\ge -2 \end{cases}$
12. $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & , x<4 \\ x+1 & , 4\le x\le 6 \\ -3 & , x>6 \end{cases}$
13. $f(x)=\begin{cases} |x| & , x<3 \\ x+2 & , x\ge 3 \end{cases}$
14. $f(x)=\begin{cases} 3-2x & , x<-1 \\ 6 & , -1\le x\le 3 \\ x^2 & , x>3 \end{cases}$

15 $f(x) = \begin{cases} 3 & , x = 1 \\ -x+2 & , x \neq 1 \end{cases}$

16 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$

17 $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \leq 3 \\ -2 & , x > 3 \end{cases}$

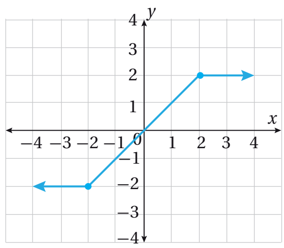
18 $f(x) = |3x - 12|$

19 $f(x) = -|2x - 4|$

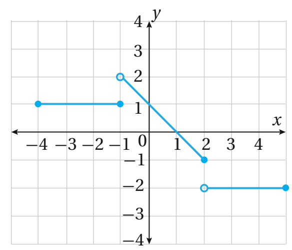
20 $f(x) = |x - 4| + 1$

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

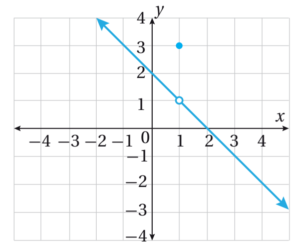
21



22

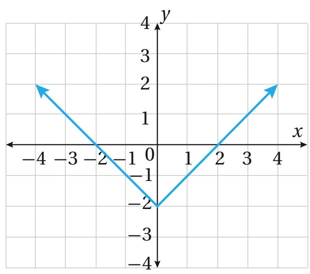


23

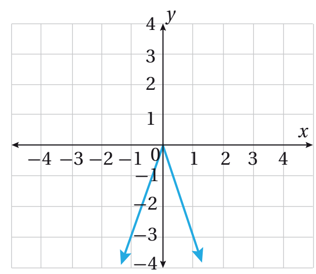


أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل بيانيًّا في كلّ من الأشكال الآتية:

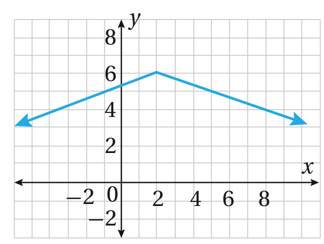
24



25



26



27 أعود إلى مسألة اليوم وأكتبُ الاقتران المتشعّب الذي يُمكنني استعماله لحساب ثمن المياه لأيّ كمّية مستهلكة.

خيمة: يُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = -1.4\,|x - 2.5| + 3.5$ حافّتَي الوجه الأمامي لخيمة، ويُمثّل العمود الذي يتوسّط الوجه الأمامي للخيمة محور التماثل، أمّا المحور x فيُمثّله سطح الأرض.

28 أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

29 أجد مجال الاقتران ومداه.

30 **أعمال:** يتقاضى مندوب مبيعات راتبًا شهريًّا مقداره 500 دينار، وعمولة بنسبة 1% لأول 20000 دينار من مبيعاته الشهرية، وإذا زادت مبيعاته على 20000 دينار يأخذ عمولة بنسبة 1.5% ممّا يزيد على 20000 دينار. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الدخل الشهري لهذا المندوب.

عاصفة: تبدأ العاصفة المطرية بالهطل على شـــكل رذاذ ثم يزداد معدل الهطل، ثم تعود ثانية للهطل على شكل رذاذ، ويُمثّل الاقتران $r(t) = -0.5|t-1| + 0.5$، معدل الهطل r (بالإنش لكلّ ساعة)، حيث t الزمن بالساعات منذ بداية الهطل.

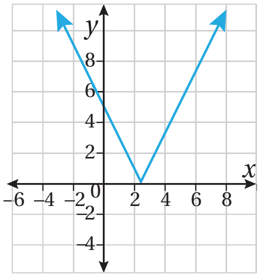
31 أُمثّل اقتران معدّل الهطل بيانيًّا.

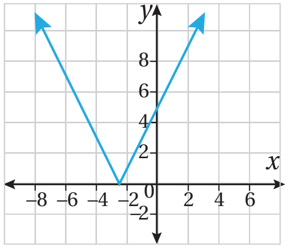
32 أجد كم ساعة استمر الهطل.

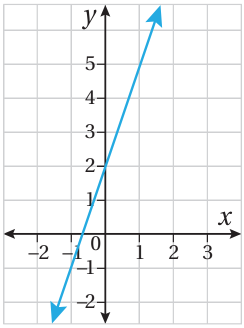
33 بعد كم ساعة كان أعلى معدل هطل؟ أُبرّر إجابتي.

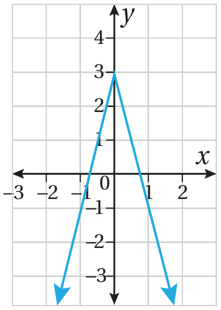
مهارات التفكير العليا

34 تبرير: أيّ الآتية تُمثّل منحنى الاقتران $f(x) = |2x-5|$؟ أُبرّر إجابتي:

a) 

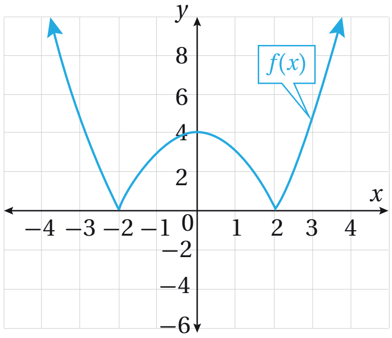
b) 

c) 

d) 

35 تبرير: هل تُمثّل العلاقة المتشعّبة الآتية اقترانًا؟ أُبرّر إجابتي.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-5 & , x \leq 2 \\ -x+2 & , x \geq 1 \end{cases}$$



36 تبريـر: أكتـب قاعـدة الاقتـران $f(x)$ الممثـل بيانيًّـا فـي الشـكل المجـاور مبـررًا إجابتـي.

37 مسألة مفتوحة: أكتبُ اقتران قيمة مطلقة $f(x)$ بحيث يكون $f(4) = -5$.

تحدٍّ: يُمكن كتابة المقدار $x^2 + px - q$ على الصورة $(x-2.5)^2 - 0.25$

38 أجد قيمة كلّ من p، و q.

39 أجد إحداثيَي كلّ من نقطتَي تقاطع منحنى $f(x) = |x^2 + px - q|$ مع محور x.

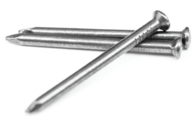
الدرس 2

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations and Inequalities

فكرة الدرس
- حل معادلات تتضمّن قيمة مطلقة لتعابير جبرية خطّية.
- حل متباينات تتضمّن قيمة مطلقة لتعابير جبرية خطّية.

المصطلحات معادلة القيمة المطلقة، متباينة القيمة المطلقة.

مسألة اليوم تُنتج آلة مسامير فولاذية طولها 5 cm، ويُسمح أن يزيد طول المسمار على الطول المحدّد أو يقلّ عنه بمقدار 0.02 cm. أكتبُ معادلة وأحلّها لإيجاد الحدّين الأدنى والأعلى لطول المسمار الذي تُنتجه هذه الآلة.



معادلات القيمة المطلقة

معادلة القيمة المطلقة (absolute value equation) هي المعادلة التي تحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري.

تعلّمتُ سابقًا أنّ القيمة المطلقة للمتغيّر x يُمكن إعادة تعريفها على صورة اقتران متشعّب:

$$|x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

يُمكن الاستفادة من الحقيقة السابقة في حل المعادلة $|x| = c$ حيث $c > 0$؛ إذ إنّه يوجد للمتغيّر x قيمتان محتملتان: قيمة موجبة وهي c، وقيمة سالبة وهي $-c$، فإذا كان $|x| = 4$، فإنّ $x = 4$، أو $x = -4$، ففي الحالتين $|x| = 4$ ويُمكن تعميم هذه القاعدة لحل أيّ معادلة تحتوي على قيمة مطلقة في أحد طرفَيها.

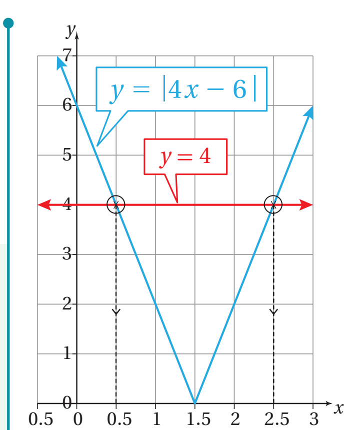
مثال 1

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

1 $|4x - 6| = 4$

الدعم البياني

يُمكنني حلّ معادلة القيمة المطلقة بتمثيل المعادلتين $y = |4x - 6|$، وَ $y = 4$ بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه ألاحظ أن منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 0.5$ وعندما $x = 2.5$، وهما حلا المعادلة ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



المعادلة الأصلية	$\lvert 4x-6\rvert = 4$	
تعريف القيمة المطلقة	$4x-6=4$ or	$4x-6=-4$
بجمع 6 إلى طرفَي كلّ معادلة	$4x=10$	$4x=2$
بقسمة طرفَي كلّ معادلة على 4	$x=2.5$	$x=0.5$

إذن: حلول هذه المعادلة: $x = 2.5, x = 0.5$

أتحقّق: للتحقّق؛ أُعوّض قيمتَي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = 2.5$

$$|4(2.5)-6| \stackrel{?}{=} 4$$
$$|10-6| \stackrel{?}{=} 4$$
$$|4| \stackrel{?}{=} 4$$
$$4 = 4 \checkmark$$

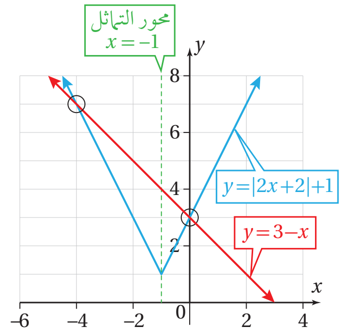
عندما $x = 0.5$

$$|4(0.5)-6| \stackrel{?}{=} 4$$
$$|2-6| \stackrel{?}{=} 4$$
$$|-4| \stackrel{?}{=} 4$$
$$4 = 4 \checkmark$$

2 $|2x+2|+1 = 3-x$

الدعم البياني

يُمكنني حلّ معادلة القيمة المطلقة بتمثيل المعادلتين $y = |2x+2|+1$ ،$y = 3-x$ بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، كما في الشكل المجاور. ومنه أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 0$ وعندما $x = -4$، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



المعادلة الأصلية	$\lvert 2x+2\rvert + 1 = 3-x$	
بطرح 1 من كلا الطرفين	$\lvert 2x+2\rvert + 1 - 1 = 3-x-1$	
بالتبسيط	$\lvert 2x+2\rvert = 2-x$	
تعريف القيمة المطلقة	$2x+2 = 2-x$ or	$2x+2 = -(2-x)$
أُبسّط كل معادلة	$2x+2 = 2-x$	$2x+2 = x-2$
بإعادة ترتيب المعادلتين	$3x = 0$	$x = -4$
بقسمة طرفَي المعادلة الأولى على 3	$x = 0$	$x = -4$

إذن: حلول هذه المعادلة: $x = 0, x = -4$

أتحقّق: للتحقّق؛ أُعوّض قيمتَي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -4$

$$|2(-4)+2| + 1 \stackrel{?}{=} 3-(-4)$$
$$|-6| + 1 \stackrel{?}{=} 3+4$$
$$7 = 7 \checkmark$$

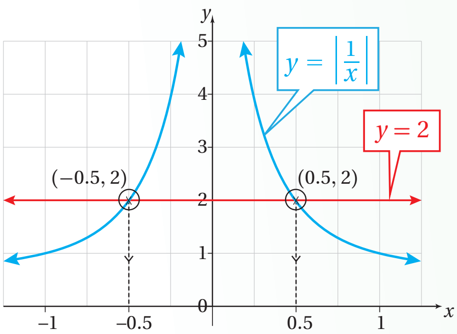
عندما $x = 0$

$$|2(0)+2| + 1 \stackrel{?}{=} 3-(0)$$
$$|2| + 1 \stackrel{?}{=} 3$$
$$3 = 3 \checkmark$$

3 $\left|\frac{1}{x}\right| = 2$

الدعم البياني

يُمكنني حـلّ معادلة القيمـة المطلقة بتمثيل المعادلتين $y = \left|\frac{1}{x}\right|$ ، $y = 2$ بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفســه، كما في الشـكل المجاور. ومنه أُلاحظ أنّ منحنيَـي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 0.5$ وعندما $x = -0.5$، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



المعادلة الأصلية		$\left\|\frac{1}{x}\right\| = 2$
تعريف القيمة المطلقة	$\frac{1}{x} = -2$	$\frac{1}{x} = 2$ **or**
خاصية الضرب التبادلي	$-2x = 1$	$2x = 1$
بقسمة طرفَي كلّ معادلة على معامل x	$x = -0.5$	$x = 0.5$

إذن: حلول هذه المعادلة: $x = 0.5, x = -0.5$

أتحقّق: للتحقّق؛ أُعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -0.5$

$$\left|\frac{1}{-0.5}\right| \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 = 2 \checkmark$$

عندما $x = 0.5$

$$\left|\frac{1}{0.5}\right| \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 = 2 \checkmark$$

أتحقّق من فهمي

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

a) $|4x + 8| = 4$ b) $2|x + 1| - x = 3x - 4$ c) $\left|\frac{1}{2x - 7}\right| = 2$

تعلّمـتُ فـي المثال السـابق حـلّ معـادلات تحوي قيمـة مطلقة في أحـد طرفَي المعادلـة، أمّا إذا كانـت المعادلـة تحـوي قيمـة مطلقـة علـى طرفَـي المسـاواة مثـل $|A| = |B|$ ، فإنّه يوجد 4 حلـول ممكنة لهـذه المعادلة:

$$(1)\ A = B \qquad (2)\ A = -B \qquad (3)\ -A = B \qquad (4)\ -A = -B$$

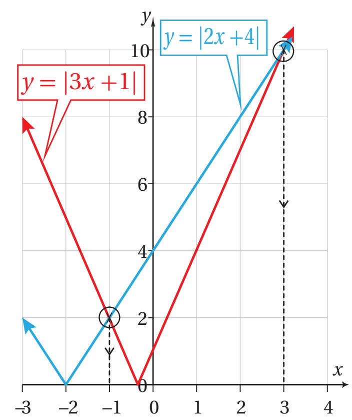
وبتطبيق خصائص المساواة؛ فإنّ المعادلتين (1) و(4) متكافئتان، وكذلك بالنسبة إلى المعادلتين (2) و(3)، ما يعني أنّ الحلول جميعها يُمكن إيجادها من المعادلتين (1) و(2).

مثال 2

أحلّ المعادلة $|3x + 1| = |2x + 4|$.

الدعم البياني

يُمكنني حلّ هذه المعادلة بتمثيل كلّ من $y = |2x + 4|$، $y = |3x + 1|$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 3$ وعندما $x = -1$، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا عن طريق حل المعادلتين الناتجتين عن الحالتين $A = B$ و $A = -B$



الحالة الأولى $A = B$

$$2x + 4 = 3x + 1$$
$$2x = 3x - 3$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

الحالة الثانية $A = -B$

$$2x + 4 = -(3x + 1)$$
$$2x + 4 = -3x - 1$$
$$2x = -3x - 5$$
$$5x = -5$$
$$x = -1$$

إذن: لهذه المعادلة حلّان، هما $x = 3$, $x = -1$

أتحقّق: للتحقّق؛ أُعوّض قيمتّي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = 3$

$$|2(3)+4| \stackrel{?}{=} |3(3)+1|$$
$$10 = 10 \quad ✓$$

عندما $x = -1$

$$|2(-1)+4| \stackrel{?}{=} |3(-1)+1|$$
$$2 = 2 \quad ✓$$

أتحقّق من فهمي

أحلّ المعادلة $\dfrac{|2x + 4|}{2} = 2|x - 1|$

توجد مواقف حياتية تُستعمل فيها معادلات القيمة المطلقة.

مثال 3 : من الحياة

درجة حرارة الجسم الطبيعية: تكون درجة حرارة جسم الإنسان المقيسة من تحت لسانه طبيعية؛ إذا كان الفرق المطلق بينها وبين 36.8°C يساوي 0.5°C، أكتبُ معادلة، ثم أستعملها لإيجاد الحدّين الأعلى والأدنى لدرجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية.

الدرجة المتوسّطة هي $36.8°$، والفرق هو $0.5°$، فإذا دلّ المتغيّر x على درجة حرارة الجسم تكون المعادلة المطلوبة $|x - 36.8| = 0.5$

المعادلة الأصلية	$\lvert x - 36.8\rvert = 0.5$	
تعريف القيمة المطلقة	$x - 36.8 = -0.5$	*or* $x - 36.8 = 0.5$
بجمع 36.8 لطرفَي كلّ معادلة	$x = 36.3$	$x = 37.3$

إذن: الحد الأدنى لدرجة جسم الإنسان الطبيعية هي $36.3°\ C$ والحد الأعلى $37.3°\ C$

أتحقّق من فهمي

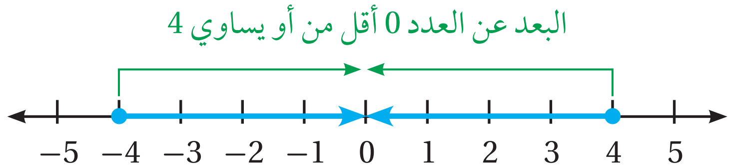
طعام: لصنع مسحوق الكاكاو؛ تُحمّص بذوره على درجة حرارة لا تزيد على $300°\ F$ أو تقلّ عنها بأكثر من $25°\ F$، أكتبُ معادلة قيمة مطلقة، ثم أستعملها لإيجاد الحدّين الأعلى والأدنى لدرجة حرارة تحميص بذور الكاكاو.

معلومة

نحتاج إلى 400 حبّة كاكاو تقريبًا؛ لإنتاج أقلّ من نصف كيلو غرام شوكولاتة؛ لذا، تمتاز الشوكولاتة الخالصة بسعرها المرتفع.

متباينات القيمة المطلقة

تعلّمتُ سابقًا أنّ المتباينة جملة رياضية تحوي الرمز $\geq$ ، أو $\leq$، أو $>$، أو $<$، وتُسمى المتباينة التي تحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري **متباينة القيمة المطلقة** (absolute value inequality)؛ ولحلّ متباينة قيمة مطلقة أستعمل المفاهيم الأساسية لحلّ معادلة القيمة المطلقة، فمثلًا، لحل المعادلة $|x| = 4$، فإنّني أبحثُ عن الأعداد جميعها التي تبعد عن الصفر بمقدار 4. ومنه، فإنّه لحلّ المتباينة $|x| \leq 4$ فإنّني أبحثُ عن الأعداد جميعها التي بعدها عن 0 أقلّ من 4 أو يساويها، ويُمكنني تمثيل مجموعة الحلّ على خط الأعداد كالآتي:



وبالاستعانة بخط الأعداد أعلاه؛ أُلاحظ أنّ مجموعة حلّ المتباينة $|x| \leq 4$ هي $x \geq -4$ و $x \leq 4$ ويُمكنني أيضًا التعبير عنها باستعمال المتباينة المركّبة $-4 \leq x \leq 4$ أو بالفترة $[-4, 4]$.

مفهوم أساسي

متباينة القيمة المطلقة (أقلّ من)

إذا كان X يُمثّل مقدارًا جبريًّا وكان k عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

$$|X| < k \Leftrightarrow -k < X < k$$

والقاعدة صحيحة أيضًا إذا كانت إشارة المتباينة $\le$

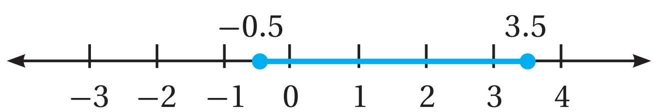
مثال 4

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

1 $|2x - 3| \le 4$

$|2x-3| \le 4$	المتباينة الأصلية
$-4 \le 2x - 3 \le 4$	بإعادة كتابة المتباينة
$-1 \le 2x \le 7$	بجمع 3 إلى حدود المتباينة جميعها
$-0.5 \le x \le 3.5$	بقسمة حدود المتباينة جميعها على 2

إذن: مجموعة الحلّ هي $[-0.5, 3.5]$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



2 $|3x + 7| < -5$

بما أنّ القيمة المطلقة لأيّ قيمة تساوي عددًا موجبًا؛ فإنّ مجموعة حلّ المتباينة هي المجموعة الخالية { } أو $\varnothing$

أتحقّق من فهمي

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

a) $|3x - 4| < 5$

b) $|0.5x - 1| + 2 \le 2.5$

c) $|x - 4| < -1$

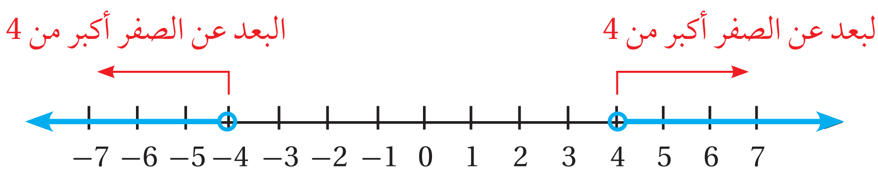
أتذكّر

أستعملُ رمز الفترة المغلقة للتعبير عن المتباينة التي تحوي مساواة، وأستعملُ رمز الفترة المفتوحة للتعبير عن المتباينة التي لا تحوي مساواة.

أتذكّر

يُرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز { }، أو الرمز $\varnothing$ (تُقرأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

تعلّمتُ في المثال السابق حلّ متباينة القيمة المطلقة (أقلّ من)، ولحلّ متباينة القيمة المطلقة (أكبر من) مثل $|x| > 4$، فإنّني أبحث عن الأعداد جميعها التي بعدها عن الصفر أكبر من 4، وهي تُمثّل الأعداد الأقلّ من -4 أو الأعداد الأكبر من 4، ويُمكنني تمثيل مجموعة الحلّ على خط الأعداد كالآتي:



أُلاحظ من التمثيل أعلاه، أنّه يوجد مجموعتا حلّ منفصلتان، وعندها تكون مجموعة الحلّ هي: $x > 4$ أو $x < -4$ ويُمكنني أيضًا التعبير عنها باتحاد فترتين منفصلتين $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

مفهوم أساسي **متباينة القيمة المطلقة (أكبر من)**

إذا كان X يُمثّل مقدارًا جبريًّا وكان k عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ

$$|X| > k \Leftrightarrow X < -k \quad or \quad X > k$$

والقاعدة صحيحة أيضًا إذا كانت إشارة المتباينة $\geq$

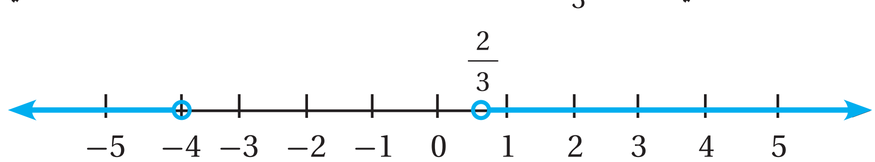
مثال 5

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

1 $|3x + 5| > 7$

$\|3x + 5\| > 7$	المتباينة الأصلية
$3x + 5 < -7 \quad or \quad 3x + 5 > 7$	بإعادة كتابة المتباينة
$3x < -12 \qquad 3x > 2$	بطرح 5 من طرفَي كل متباينة
$x < -4 \qquad x > \frac{2}{3}$	بقسمة طرفَي كل متباينة على 3

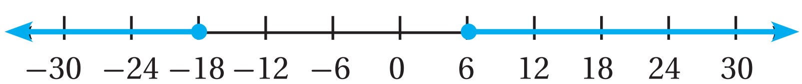
إذن: مجموعة الحلّ هي: $(-\infty, -4) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



2 $-\frac{1}{3}\left|3+\frac{x}{2}\right| \leq -2$

المتباينة الأصلية	$-\frac{1}{3}\left|3+\frac{x}{2}\right| \leq -2$
بضرب طرفَي المتباينة في -3، وعكس اتّجاه المتباينة	$\left|3+\frac{x}{2}\right| \geq 6$
بإعادة كتابة المتباينة	$3+\frac{x}{2} \leq -6 \quad or \quad 3+\frac{x}{2} \geq 6$
بطرح 3 من طرفَي كلّ المتباينة	$\frac{x}{2} \leq -9 \qquad \frac{x}{2} \geq 3$
بضرب طرفَي كلّ متباينة في 2	$x \leq -18 \qquad x \geq 6$

إذن: مجموعة الحلّ هي $(-\infty, -18] \cup [6, \infty)$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



أتحقّق من فهمي

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

a) $\frac{1}{3}|2x+4| > 2$

b) $-2\,|3x+4| < -8$

أتذكّر

يتغيّر اتّجاه إشــارة المتباينة عند ضرب طرفَيها في عدد سالب، أو قســمتهما عليه. فمثــلًا، $-x > a$ تصبــح $x < -a$ بعــد ضــرب طرفيها فــي العــدد -1، حيث a عدد حقيقي.

تعلّمتُ في المثالين السابقين حلّ متباينة تحوي قيمة مطلقة في أحد طرفيها، ويُمكن أن تحوي المتباينة قيمة مطلقة في طرفيها، عندئذ يُمكن حلّها باتّباع الإجراءات الآتية:

- مساواة المقدارين داخل رمزَي القيمة المطلقة ببعضهما، وحلّ المعادلة الناتجة.
- مســاواة أحد المقدارين داخل رمزَي القيمة المطلقة بمعكوس المقدار الآخر، وحلّ المعادلة الناتجة.
- اختيار عدد بين الحلّين وتعويضه في المتباينة، فإذا كانت الجملة صحيحة تكون مجموعة حلّ المتباينة الأصلية هــي مجموعة الأعداد الواقعة بين الحلّيــن، وإلّا كانت مجموعة الأعداد الواقعة خارج الحلّين.

مثال 6

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية:

1 $|2x+1| > |3x-2|$

الخطوة 1: مساواة المقدارين داخل رمزَي القيمة المطلقة ببعضهما، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة	$2x+1 = 3x-2$
بطرح $3x$ من كلا الطرفين	$-x+1=-2$
بطرح 1 من طرفَي المعادلة	$-x=-3$
بقسمة طرفَي المعادلة على -1	$x=3$

الخطـوة 2: مساواة أحد المقدارين داخل رمز القيمة المطلقة بمعكوس المقدار الآخر، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة أحد المقدارين بمعكوس الآخر	$2x+1=-(3x-2)$
خاصية توزيع الضرب على الجمع	$2x+1=-3x+2$
بجمع $3x$ إلى طرفَي المعادلة	$5x+1=2$
بطرح 1 من طرفَي المعادلة	$5x=1$
بقسمة طرفَي المعادلة على 5	$x=\frac{1}{5}$

إذن: الحلّان الناتجان هما $x=3, x=\frac{1}{5}$

الخطوة 3: تحديد مجموعة الحلّ.

أختار عددًا بين الحلّين وليكن $x=2$، ثم أُعوّضه في المتباينة $|2x+1| > |3x-2|$

$$|2(2)+1| \overset{?}{>} |3(2)-2|$$

$$|5| \overset{?}{>} |4|$$

$$5 > 4 \quad ✓$$

بما أنّ العدد 2 حقّق المتباينة؛ فإنّ مجموعة حلّ المتباينة تقع بين العددين $\frac{1}{5}$ و 3

إذن: مجموعة حلّ هذه المتباينة هي: $(\frac{1}{5}, 3)$

2 $|3x-2| \geq |2x+5|$

الخطوة 1: مساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة ببعضهما، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة $3x-2=2x+5$

بطرح $2x$ من كلا الطرفين $x-2=5$

بجمع 2 إلى طرفَي المعادلة $x=7$

الخطوة 2: مساواة أحد المقدارين داخل القيمة المطلقة بمعكوس المقدار الآخر، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة أحد المقدارين بمعكوس الآخر $3x-2=-(2x+5)$

خاصية توزيع الضرب على الجمع $3x-2=-2x-5$

بجمع $2x$ إلى طرفَي المعادلة $5x-2=-5$

بجمع 2 إلى طرفَي المعادلة $5x=-3$

بقسمة طرفَي المعادلة على 5 $x=\frac{-3}{5}$

إذن: الحلّان الناتجان $x=7$ و $x=\frac{-3}{5}$

الخطوة 3: تحديد مجموعة الحلّ.

أختار عددًا بين الحلّين وليكن $x=0$، وأُعوّضه في المتباينة $|3x-2| \geq |2x+5|$

$$|3(0)-2| \overset{?}{\geq} |2(0)+5|$$

$$|-2| \overset{?}{\geq} |5|$$

$$2 \geq 5 \quad ✗$$

بما أنّ العدد 0 لم يُحقّق المتباينة؛ فإنّ مجموعة حلّ المتباينة تقع خارج العددين $\frac{-3}{5}$ و 7

إذن: مجموعة حلّ هذه المتباينة هي: $(-\infty, -\frac{3}{5}]\cup[7, \infty)$

أتحقّق من فهمي

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية:

a) $|3x + 5| > |x - 1|$ **b)** $|2 - 3x| \leq |4x + 3|$

مثال 7: من الحياة

معدّل كتل التفّاحات في صندوق هو 200 g، وقد تختلف الكتلة الفعلية للتفّاحة بما لا يتجاوز 4% من هذا المعدّل. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة أجد من خلالها مدى الكتلة الفعلية للتفّاحات في الصندوق.

بما أنّ الكتلة الفعلية للتفاحة لا تتجاوز 4% من معدل كتل التفّاحات، فإنّه يُمكن إيجاد مقدار الاختلاف في كتلة التفّاح كالآتي:

$$4\% \times 200 = \frac{4}{100}(200) = 8$$

أي إنّ كتلة التفّاحة قد تزيد على المعدل أو تقلّ عنه بمقدار 8 g على الأكثر. فإذا رمزنا لكتلة التفّاحة بالرمز x؛ فإنّ المتباينة التي تُعبّر عن هذه المسألة هي $|x-200| \leq 8$.

ولإيجاد مدى الكتلة الفعلية للتفّاحات أحلّ هذه المتباينة.

$-8 \leq x - 200 \leq 8$ أعيد كتابة المتباينة

$192 \leq x \leq 208$ بجمع 200 لحدود المتباينة جميعها

إذن: مجموعة الحلّ هي: $[192, 208]$

وهذا يعني أنّ مدى الكتلة الفعلية للتفّاحات هو من 192 g إلى 208 g

أتحقّق من فهمي

صحّة: يصل مستوى السكر في دم الانسان إلى مستوى حرج وخطير؛ إذا زاد مستوى السكر في الدم أو انخفض بأكثر من 38 mg عن المعدل الطبيعي البالغ 88 mg. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة أجد من خلالها مستويات سكر الدم الخطرة.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

1. $|3x-4| = 2$
2. $\left|\frac{x-4}{2}\right| = 7$
3. $3|2x-3| - 7 = 2$
4. $-4|5x-1| = -12$
5. $|x-2| = 3x+2$
6. $0.5\,|x-2| = 3\,|0.5x-2|$
7. $\left|\frac{2x+1}{2}\right| = \left|\frac{3x-2}{4}\right|$
8. $\left|\frac{3x+3}{2x-5}\right| - 4 = 6$
9. $3\,|0.5x+2| = 0$

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

10. $|2x+6| < 5$
11. $|4x-3| > 4$
12. $|3x+1| - 3 \leq 4$
13. $\left|\frac{2x-3}{2}\right| \geq 6$
14. $|x+2| > -3$
15. $|3x+5| < -7$
16. $|-4x-6| < 14$
17. $-2|2x-1| \geq -3$
18. $2|3x-2| + 4 \geq 9$
19. $|3-7x| > 2x$
20. $|x+1| > 2x+5$
21. $4-x < |2x-7|$

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية:

22. $|x+1| \geq |2x+5|$
23. $|5-x| > |x+4|$
24. $|2x+3| \geq |x-2|$
25. $|5x-1| > |2x+3|$
26. $|3x+2| < |x-5|$
27. $|2x-7| \leq |x+2|$

28. إذا كان a، و b، و c أعدادًا حقيقية حيث $a \neq 0$، فما عدد الحلول الممكنة للمعادلة $|ax+b| = c$؟

29. **أفاعي:** تعيش معظم الأفاعي في بيئة تتراوح درجة حرارتها من 75°F إلى 90°F، أكتبُ متباينة قيمة مطلقة تُمثّل درجات حرارة البيئات التي لا تعيش فيها الأفاعي.

30. **مطالعة:** اتّفق أعضاء نادي مطالعة أن يقرؤوا في أحد فصول كتاب وأن يتوقّفوا عن القراءة ضمن 10 صفحات قبل نهاية الفصل أو بعدها. إذا كان عدد صفحات الكتاب 400 صفحة، وكان الفصل ينتهي في الصفحة 304، فأكتبُ معادلة قيمة مطلقة يُمكنني من خلالها إيجاد أول صفحة وآخر صفحة يُمكن أن يتوقّف الأعضاء عن القراءة عندها.

معلومة

الثعابين ليس لديها جفون. في حين أنّ لديها شيئًا يُسمّى بريل، وهو طبقة شفّافة مثل (النظارة)، وعلى شكل الجلد وتُغطّي العينين للحماية.

31 **إيجارات:** يبحث سعيد عن شقّة للإيجار في أحد الأحياء، وقد وجد أنّ معدّل الإيجار الشهري للشقّة في ذلك الحي هو 250 دينارًا. ولكنّ الإيجار الفعلي للشقّة قد يزيد أو ينقص عن ذلك بمقدار 55 دينارًا على الأكثر. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة أجد من خلالها مدى الإيجار الشهري لشقّة في هذا الحي.

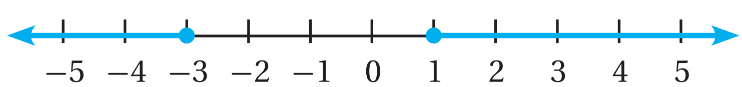
32 **جيولوجيا:** قد تزيد كتلة 20 قدم مكعّب من الرخام أو تقلّ عن 3400 رطل، بما لا يزيد على 100 رطل. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة تُعبّر عن هذه المعلومات، وأجد مدى الكتلة الممكنة لقدم مكعّب واحد من الرخام.

33 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

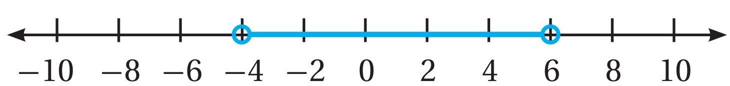
مهارات التفكير العليا

تبرير: أكتبُ متباينة قيمة مطلقة تُمثّل مجموعة حلّها بالرسم الآتي:

34



35

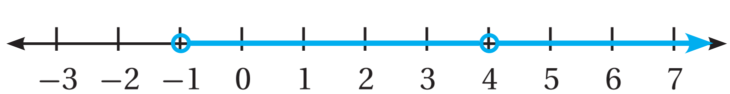


36 **تبرير:** إذا كان $a \neq 0$، فهل للمعادلتين $|x + a| = b$، و $|x| + a = b$ الحلّ نفسه؟ أُبرّر إجابتي.

37 **أكتشف المختلف:** أُحدّد المتباينة التي تختلف عن المتباينات الثلاث الأخرى. أُبرّر إجابتي.

$|2-x| < 6$ $2+|-3x+2| \geq 5$ $5-|4x+1| \leq 8$ $|2x+1| > 3$

38 **أكتشف الخطأ:** مثّلت مريم مجموعة حلّ المتباينة $|2x - 3| < 5$ على خط الأعداد على النحو الآتي:



هل كانت إجابتها صحيحة؟ أُبرّر إجابتي.

الدرس
3

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities In Two Variables

فكرة الدرس

- تمثيل متباينة خطّية بمتغيّرين بيانيًّا.
- حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا.

المصطلحات منطقة الحلول الممكنة، المستقيم الحدودي، نظام المتباينات الخطّية، مجموعة الحلّ.

مسألة اليوم يوجد في إحدى قاعات الطعام طاولات مستديرة، يوضع حول الواحدة منها 8 مقاعد، وأخرى مستطيلة يوضع حول الواحدة منها 6 مقاعد. ما المتباينة التي تُمثّل عدد الطاولات اللازمة من كل نوع؛ إذا كان عدد الحضور في مأدبة غداء 264 شخصًا على الأقلّ؟ وما عدد الطاولات المستطيلة اللازمة؛ إذا استُعملت في هذا المأدبة 18 طاولة مستديرة؟

أتذكّر

لتحديد إذا كان الزوج المرتب $(1, 2)$ يُمثّل حلًّا للمتباينة $x-y \leq 3$، أُعوّضه في المتباينة:

$x-y \leq 3$

$1-2 \leq 3$

$-1 \leq 3$

أُلاحظ أنّ ناتج التعويض حقّق المتباينة. إذن: $(1, 2)$ يُمثّل حلًّا للمتباينة.

تمثيل المتباينات الخطّية بمتغيّرين

تعلّمتُ سابقًا أنّ المتباينة الخطّية جملة رياضية قد تحتوي على متغيّر واحد أو متغيّرين.

ومن أمثلة المتباينات الخطّية بمتغيّرين:

$$y \leq x \quad , \quad y \leq 2x-5 \quad , \quad 2x + 3y \geq 12$$

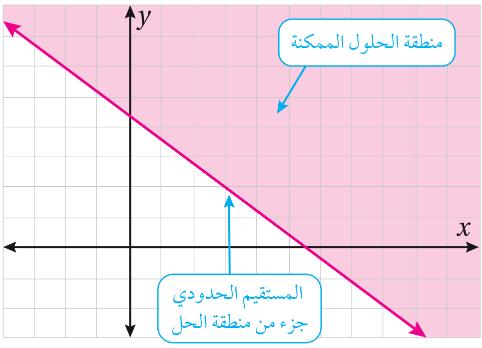
تُسمّى مجموعة الأزواج (a, b) التي تُحقّق المتباينة مجموعة حلّ المتباينة، أي إذا عُوّض a بدل x، و b بدل y نتجت عبارة عددية صحيحة.

عند تمثيل المتباينة الخطّية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، فإنّ النقاط التي تُمثّل حلولها الممكنة جميعها تُسمّى: **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible region). ولتمثيل المتباينة بيانيًّا، أبدأ برسم منحنى المعادلة المرتبطة بالمتباينة بعد استعمال رمز المساواة (=) بدلًا من رمز المتباينة ($\leq$ ، $\geq$ ، $<$ ، $>$)، حيث تُمثّل المعادلة الناتجة مستقيمًا يُسمّى: **المستقيم الحدودي** (boundary line)؛ وهو مستقيم يُقسّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

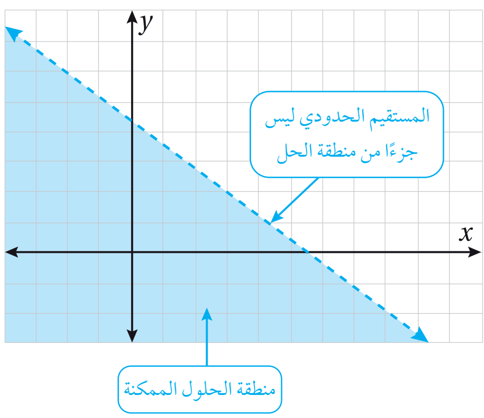
أتعلّم

لكلّ متباينة خطّية معادلة خطّية مرتبطة بها، فمثلًا $3x+2y > 2$ هي متباينة خطّية، و $3x+2y=2$ هي المعادلة الخطّية المرتبطة بها.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقــة الحلول الممكنــة؛ إذا تضمّنت المتبايـنــة الرمز $\leq$ أو الرمــز $\geq$، عندئذٍ يُرسم المستقيم الحدودي متّصلًا، كما في الشكل المجاور.



وقد **لا يكون** المســتقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمّنت المتباينة الرمز $>$ أو الرمز $<$، عندئذٍ يُرسم المستقيم الحدودي مُتقطّعًا، كما في الشكل المجاور.



لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبَي المستقيم الحدودي هــي منطقة الحلــول الممكنة، أختــار النقطــة (a, b) التــي لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوّضها في المتباينة الخطّية، فإذا كانت تُحقّقها (أي ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلّل الجزء من المســتوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا فأُظلّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 1 **أُمثّل كلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:**

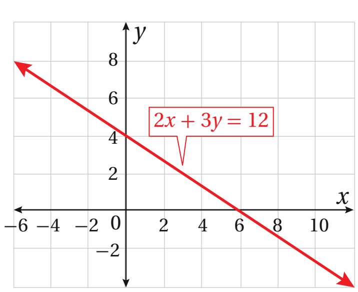
1 $2x + 3y \geq 12$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيم الحدودي بيانيًّا.

أُنشــئ جدول قِيَــم لإيجاد نقطتَــي تقاطع المســتقيم الحدودي $2x + 3y = 12$ مع المحورين الإحداثيّين.

x	0	6
y	4	0
(x, y)	$(0, 4)$	$(6, 0)$

أُعيّن النقطتين $(6, 0)$, $(0, 4)$ في المستوى الإحداثي، ثم أرســم مســتقيمًا يمرّ بهما، وبما أنّه توجد مســاواة في رمــز المتباينة؛ فإنّه يُرســم متّصلًا كما في الشــكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلول الممكنة.

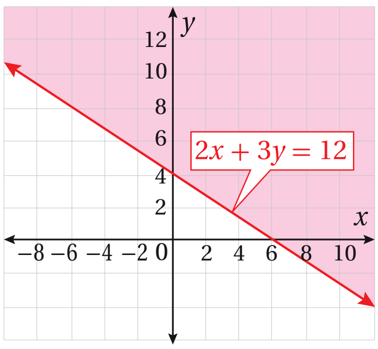
أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي ولتكن $(0, 0)$، ثم أتحقّق إذا كان ناتج تعويضها في المتباينة صحيحًا أم لا.

المتباينة الأصلية	$2x + 3y \geq 12$
بتعويض $x = 0, y = 0$	$2(0) + 3(0) \stackrel{?}{\geq} 12$
العبارة غير صحيحة	$0 \geq 12$ ✗

إذن: النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة.

الخطوة 3: أُظلّل منطقة الحلول الممكنة.

بما أنّ النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة، إذن: فهي لا تقع في منطقة الحلول الممكنة؛ لذا، فإنّني أُظلّل الجزء من المستوى الذي لا تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل المجاور.



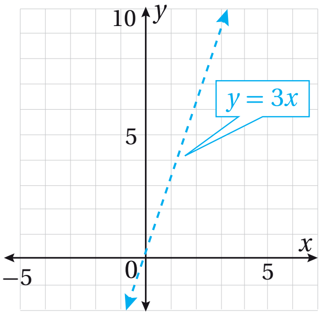
2 $y < 3x$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيم الحدودي.

أُنشئ جدول قِيَم لإيجاد نقطتين تقعان على المستقيم الحدودي $y = 3x$

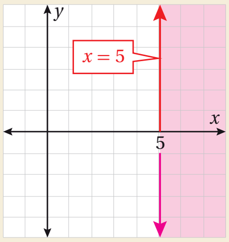
x	1	0
y	3	0
(x, y)	$(1, 3)$	$(0, 0)$

أُعيّن النقطتين $(0, 0), (1, 3)$ في المستوى الإحداثي، ثم أرسمُ مستقيمًا يمرّ بهما، وبما أنّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة؛ فإنّه يُرسم متقطعًا كما في الشكل المجاور.

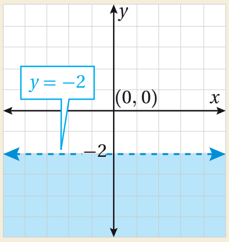


أتذكّر

تُمثّل المتباينة الخطّية ذات المتغيّر الواحد، مثل $x \geq 5$ كما في الشكل الآتي:



في حين تُمثّل المتباينة الخطّية ذات المتغيّر الواحد، مثل $y < -2$، كما في الشكل الآتي:



أتذكّر

إنّ أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطّية بمتغيّرين، هي إيجاد نقطتَي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيّين، ولكن هذا غير ممكن في المستقيمات على الصورة $Ax = By$

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول الممكنة.

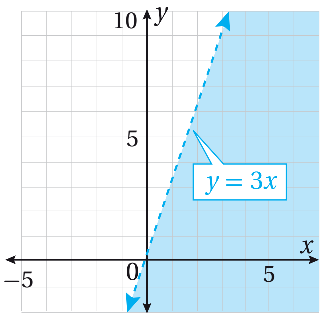
أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي ولتكن $(2, 1)$، ثم أتحقّق إذا كان ناتج تعويضها في المتباينة صحيحًا أم لا.

المتباينة الأصلية	$y < 3x$
بتعويض $x = 2, y = 1$	$1 \overset{?}{<} 3(2)$
العبارة صحيحة	$1 < 6$ ✓

إذن: النقطة $(2, 1)$ تُحقّق المتباينة.

الخطوة 3: أُظلّل منطقة الحلول الممكنة.

بما أنّ النقطة $(2, 1)$ حقّقت المتباينة، إذن: فهي تقع في منطقة الحلول الممكنة؛ لذا، فإنّني أُظلّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل المجاور.



أتحقّق من فهمي

أُمثّل كلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

a) $y \geq -1$ b) $x < 3$ c) $y \geq 0.5x$ d) $2x - y < 8$

> **إرشاد**
>
> يُفضّل اختيار النقطة $(0, 0)$ لفحص المتباينة لسهولة إجراء الحسابات. ولكن، إذا وقعت على المستقيم الحدودي فيجب اختيار نقطة غيرها.

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بمتغيرين

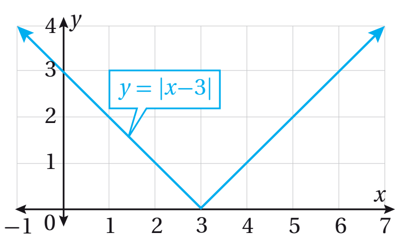
إنّ تمثيل متباينة القيمة المطلقة بمتغيّرين بيانيًّا مشابه لتمثيل المتباينة الخطّية بمتغيّرين. أُمثّل أولًا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بالمتباينة، ثم أُحدّد إذا كانت المستقيمات الحدودية متّصلة أم متقطعة، ثم أُحدّد المنطقة المراد تظليلها باختيار نقطة ما.

مثال 2

أُمثّل المتباينة $y \geq |x-3|$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أُمثّل المعادلة المرتبطة بالمتباينة بيانيًّا.

أُمثّل المعادلة المرتبطة $y = |x-3|$، وبما أنّه توجد مساواة في رمز المتباينة؛ فإنّ المستقيمين الحدوديين يُرسمان متّصلين كما في الشكل المجاور.



> **أتذكّر**
>
> يُمكن تمثيل معادلة القيمة المطلقة بمتغيّرين بعدّة طرائق منها: الانعكاس حول المحور x، أو استعمال محور التماثل والرأس.

الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلول الممكنة.

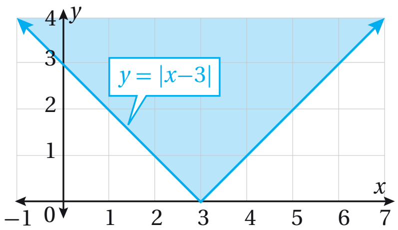
أختار نقطة لا تقع على المستقيمين الحدوديّين ولتكن $(0, 0)$، ثم أتحقّق إذا كان ناتج تعويضها في المتباينة صحيحًا أم لا.

المتباينة الأصلية	$y \geq \|x-3\|$
بتعويض $x = 0, y = 0$	$0 \overset{?}{\geq} \|0-3\|$
العبارة غير صحيحة	$0 \geq 3$ ✗

إذن: النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة.

الخطوة 3: أُظلّل منطقة الحلول الممكنة.

بما أنّ النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة، إذن: فهي لا تقع في منطقة الحلول الممكنة؛ لذا، فإنّني أُظلّل الجزء من المستوى الذي لا تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل المجاور.



أتحقّق من فهمي أُمثّل كلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

a) $y > -\frac{1}{2}|x|$

b) $y \leq |x-4| + 1$

c) $y \geq |x| - 2$

حل نظام متباينات خطية

يتكوّن **نظام المتباينات الخطّيّة** (system of linear inequalities) من متباينتين خطّيّتين أو أكثر. ويُطلق على مجموعة الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق المتباينات جميعها اسم **مجموعة الحلّ** (solution set). فمثلًا، يتكوّن النظام الآتي من 3 متباينات:

المتباينة الأولى	$x + y < 2$
المتباينة الثانية	$-2x + y > -1$
المتباينة الثالثة	$x - 3y \leq -2$

ويُمثّل الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنّه يُحقّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتّب يُحقّق المتباينة الأولى	$-1 + 2 = 1 < 2$
الزوج المُرتّب يُحقّق المتباينة الثانية	$-2(-1) + 2 = 4 > -1$
الزوج المُرتّب يُحقّق المتباينة الثالثة	$-1 - 3(2) = -7 \leq -2$

لغة الرياضيات

تدل عبارة (الزوج المُرتّب يُحقّق متباينة) على أنّ الناتج يكون صحيحًا عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لحلّ نظام متباينات، أُمثّل كل متباينة فيه بيانيًّا في المســـتوى الإحداثي نفسه، ثم أُظلّل المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها التي تُمثّل حلّ النظام.

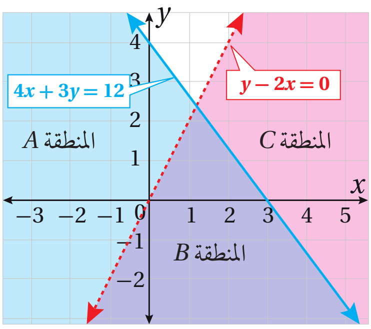
مثال 3

أُمثّل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثمّ أتحقّق من صحّة الحلّ:

$$4x + 3y \leq 12$$

$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيمين الحدوديّين.



أُمثّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديّين $4x + 3y = 12$ ، $y - 2x = 0$ في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعملُ لونين مختلفين لتظليل منطقتَي الحلّ كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أُحدّد منطقة التقاطع بين حلَّي المتباينتين.

أُلاحظ أنّ حلّ المتباينة: $4x + 3y \leq 12$ هو المنطقتان A وB، وأنّ حلّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن: المنطقة B المشتركة بين منطقتَي حلّ المتباينتين هي منطقة حلّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: التحقّق من صحّة الحلّ.

أتحقّـق من صحّة الحـلّ باختيار زوج مُرتّب يقع فـي منطقة حلّ النظـام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$، ثم أُعوّضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى	$4x + 3y \leq 12$
بالتعويض $x = 2, y = -1$	$4(2) + 3(-1) \overset{?}{\leq} 12$
العبارة صحيحة	$5 \leq 12$ ✓
المتباينة الثانية	$y - 2x < 0$
بالتعويض $x = 2, y = -1$	$-1 - 2(2) \overset{?}{<} 0$
العبارة صحيحة	$-5 < 0$ ✓

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقّق من صحّة الحلّ:

a) $y < x + 5$

$3x + 2y \geq 6$

b) $x + y \leq 2$

$x + y \geq 0$

يُمكن أحيانًا ألّا تتقاطع منطقتا حلّ المتباينتين فلا يكون لنظام المتباينتين حلّ، وتكون مجموعة حلّ النظام هي المجموعة الخالية { } أو $\varnothing$.

مثال 4

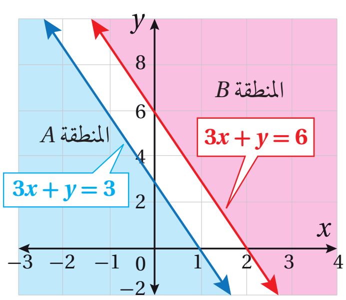
أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$3x + y \leq 3$

$3x + y \geq 6$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيمين الحدوديّين.

أُمثّل المستقيمين الحدوديّين $3x + y = 3$، $3x + y = 6$ في المستوى الإحداثي نفسه بيانيًّا، وأستعملُ لونين مختلفين لتظليل منطقتَي الحلّ، كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: تحديد منطقة التقاطع بين حلَّي المتباينتين.

أُلاحظ أنّ حلّ المتباينة: $3x + y \leq 3$ هو المنطقة A، وأنّ حلّ المتباينة: $3x + y \geq 6$ هو المنطقة B، وأنّه لا يوجد تقاطع بين منطقتَي حلّ المتباينتين. إذن: حلّ النظام هو المجموعة الخالية $\varnothing$.

أتعلّم

أُلاحظ في المثال 4 عدم وجود منطقة حلّ مشتركة؛ لأنّ المستقيمين الحدوديّين متوازيان ومنطقتا الحلّ غير متقاطعتين.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

a) $x + 3y \leq 6$

$x + 3y > 9$

b) $2x - y \geq 4$

$2x - y \leq 0$

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحلّ هي المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها.

مثال 5

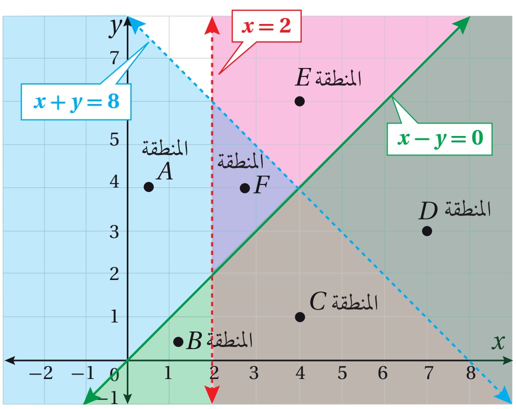
أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$x + y < 8$$
$$x - y \geq 0$$
$$x > 2$$

الخطوة 1: أُمثّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية.

أُمثّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية $x - y = 0$، $x + y = 8$، $x = 2$ في المستوى الإحداثي نفسه.

الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلّ.



- أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: F, A, B, C.
- أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: D, B, C.
- أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: F, C, D, E.

أُلاحظ أنّ المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات الثلاث. إذن: هي منطقة حلّ النظام.

أتعلّم

للتحقّق من أنّ الزوج المُرتّب يُمثّل حلًّا لنظام المتباينات، يجب تعويضه في المتباينات جميعها.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$
$$x - 5y > 6$$
$$2x - 5y < -3$$

تُستعمل أنظمة المتباينات الخطّية في العديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكن بها تحديد القِيَم الممكنة للمتغيّرات وَفق شروط محدّدة.

مثال 6 : من الحياة

نجارة: يريد نجّار شراء نوعين من المسامير، ووجد أنّ ثمن الكيلوغرام الواحد من النوع الأول JD 4، ومن النوع الثاني JD 6. إذا أراد شراء ما لا يقلّ عن 10 kg من النوعين، بحيث لا يزيد الثمن الكلي على JD 48، فأجد مقدار ما يمكنه شراؤه من كل نوع.

يوجد في هذه المسألة متغيّران مجهولان هما كمّية المسامير من النوع الأول وكمّية المسامير من النوع الثاني، وتوجد قيود على هذين المتغيّرين محدّدة بحدّ أدنى للكتلة الكلّية لما يشتريه من النوعين، والحد الأعلى لمقدار ما يدفعه للكمّيتين من النوعين.

الخطوة 1: أُعبّر عن المسألة جبريًّا بنظام من المتباينات الخطّية.

أفرضُ أنّ كتلة المسامير من النوع الأول هي x، ومن النوع الثاني هي y، ثم أكتبُ نظام المتباينات الخطّية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة.

لا تقلّ الكتلة الكلّية لنوعَي المسامير عن 10 kg	$x + y \geq 10$
لا يزيد الثمن الكلّي لنوعَي المسامير عن JD 48	$4x + 6y \leq 48$
لا يُمكن أن تكون كتلة النوع الأول سالبة	$x \geq 0$
لا يُمكن أن تكون كتلة النوع الثاني سالبة	$y \geq 0$

وبعد تبسيط المتباينة $4x + 6y \leq 48$ بالقسمة على 2؛ فإنّ نظام المتباينات الذي يُمثّل هذه المسألة هو:

$$x + y \geq 10$$
$$2x + 3y \leq 24$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

الخطوة 2: أُمثّل نظام المتباينات الخطّية بيانيًّا.

أُمثّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين $x + y = 10, 2x + 3y = 24$ في المستوى الإحداثي نفسه، مقتصرًا الرسم على الربع الأول؛ لأن $x \geq 0, y \geq 0$، ثم أُظلّل منطقة الحلّ لكلّ متباينة.

أتعلّم

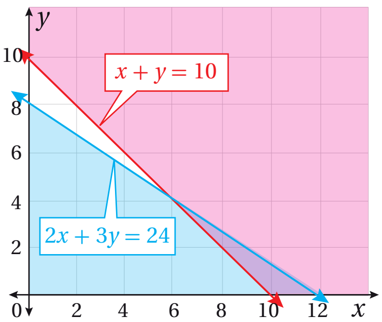
نحتاج في بعض المسائل الحياتية إلى إضافة الشرطين $x \geq 0, y \geq 0$؛ لأنّ قِيَم المتغيّرات فيها لا يُمكن أن تكون سالبة، مثل الكتلة والمسافة.

لغة الرياضيات

a على الأكثر تُكافِئ $x \leq a$، و b على الأقلّ تُكافِئ $x \geq b$.

الخطوة 3: أُحدّد منطقة الحلّ.

أُلاحظ أنّ مناطق الحلّ تتقاطع في منطقة مغلقة على شكل مثلّث هي منطقة حلّ النظام، وأنّ النقاط $(6, 4), (8, 2), (9, 1), (9, 2)$ وغيرها الكثير واقعة في منطقة الحلّ. فمثلًا، يُمكن للنجار شراء 6 kg من النوع الأول و 4 kg من النوع الثاني؛ أو 9 kg من النوع الأول و 1 kg من النوع الثاني، وهكذا لبقية النقاط الواقعة في منطقة الحلّ.



أُفكّر

أكتبُ قائمة تحوي النقاط جميعها التي يُمكن أن تكون حلولًا ممكنة لنظام المتباينات الخطّية.

أتحقّق من فهمي

خياطة: أراد خيّاط شراء نوعين من الأقمشة، ووجد أنّ ثمن المتر المربع الواحد من الكتان 5 JD، ومن الصوف 8 JD. إذا أراد شراء ما لا يزيد على $30\ m^2$ من النوعين بحيث لا يقل الثمن الكلي عن 200 JD، فأجد أكبر كمية من قماش الكتان يمكنه شراؤها.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أُمثّل كلًا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

1) $y < 2x - 1$
2) $3x - 4y \leq 12$
3) $y \geq 0.5x + 3$
4) $-2x + 3y \geq 12$
5) $y < |x+3|$
6) $y > |x-1| - 2$

أُمثّل منطقة حلّ كلّ من أنظمة المتباينات الآتية:

7) $y < -3x + 4$
   $x + 3y > -6$
8) $2x + 5y \leq 5$
   $3x - y < 6$
9) $2x + 3y \geq 6$
   $2x + 3y \leq 0$
10) $y \leq |x + 4| + 4$
    $y < x$
11) $y \leq |x + 4| - 4$
    $2x - 3y > -6$
12) $y \leq 3$
    $y \geq |x - 1|$

13 $y \geq x$

$2x + y < 6$

$2x + 5y > 10$

14 $y > x - 3$

$4x + 3y < 24$

$x \geq 2$

15 $y \geq x - 4$

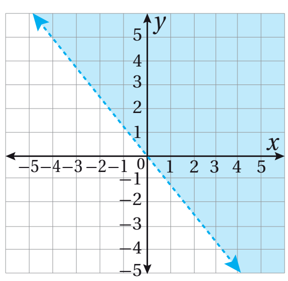
$y \leq 0.5x$

$y \geq -x$

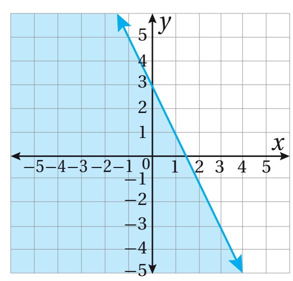
16 **ورق زينة:** تريد تغريد شـــراء ورق زينة لتزيين غرفتها احتفالًا بتخرّجها. وقد كان سعر اللفّة مــن ورق الزينة الذهبــي JD 3، ومن ورق الزينـــة الأزرق JD 2. وتريد تغريد ورق زينـــة من النوعين بما لا يزيد علـــى JD 15، بحيث لا يقلّ عدد لفّات ورق الزينة التي تشـــتريها عن 6 لفّات. أكتبُ نظام متباينات يصـــف هذا الموقف وأُمثّله بيانيًا، ثم أستعمل التمثيل البياني لأجد 4 حلول ممكنة لعدد لفّات ورق الزينة التي يُمكنها شراؤها من كل نوع.

أكتبُ المتباينة الخطّية بمتغيّرين المعطى تمثيلها البياني في كلّ ممّا يأتي:

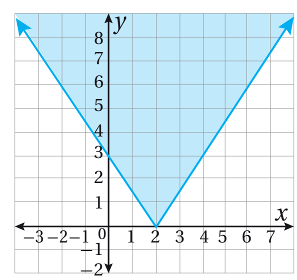
17



18



19



20 **رحلات:** يعمل رامي وخليل ســـائقَي حافلة، وقد اتّفقا على أن يتناوبا قيـــادة الحافلة، بحيث لا تقلّ مدة قيادة رامي للحافلة على نحو متواصل في اليوم عن 3 ســـاعات ولا تزيد على 6 ساعات، ولا تقلّ مدّة قيادة خليل للسيارة على نحو متواصل عن ســـاعتين ولا تزيد على 5 ســـاعات، وألا يزيد زمن قيادة كليهما للحافلة يوميًا على 10 ســـاعات. أكتبُ نظام متباينات يصف هذا الموقف، وأُمثّله بيانيًا.

21 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

هندسة: أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أُجيب عن الأسئلة التي تليه:

$x \geq 2$

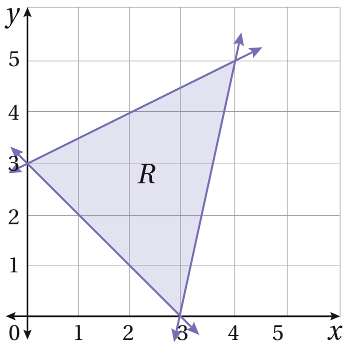
$y \geq -3$

$x + y \leq 4$

22 أصف الشكل الهندسي الذي يُمثّل منطقة الحلّ نظام المتباينات.

23 أجد مساحة المنطقة المغلقة التي تُمثّل حلّ النظام.

المنطقة R في الرسم المجاور محدودة بالمستقيمات $x+y=3, y=\frac{1}{2}x+3, y=5x-15$



24 ما المتباينات الثلاث التي تُمثّل حلّها المنطقة R؟

25 ما أكبر قيمة للمقدار $x+y$ في المنطقة R؟

26 ما أكبر قيمة للمقدار $x-y$ في المنطقة R؟

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب نظامًا من متباينتين خطّيتين بحيث يكون حلّه:

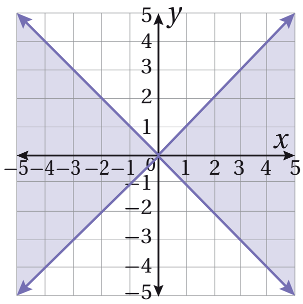
27 خطًا مستقيمًا.

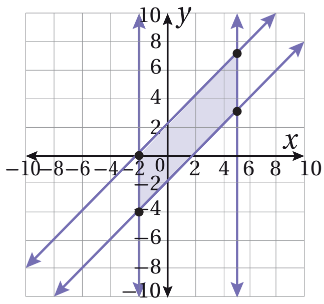
28 واقعًا في الربع الثالث.

29 تبرير: هل الجملة الآتية: صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة إطلاقًا؟ "نظام المتباينتين الذي مستقيماه الحدوديّان متوازيان ليس له حل". أُبرّر إجابتي بتقديم مثال أو مثال مضاد.

30 تبرير: إذا كانت النقطة $(3, 2)$ تُمثّل حلًّا للمتباينة $y > mx+b$، حيث $b \neq 0$ في حين أنّ النقطة $(1, 2)$ لا تُمثّل حلًّا لها، فهل ميل المستقيم الحدودي سالب أم موجب أم صفر أم غير معرّف؟ أُبرّر إجابتي.

تحدّ: أكتبُ نظام المتباينات الذي منطقة حلّه هي المنطقة المظلّلة، في كلّ من التمثيلات البيانية الآتية:

31


32


معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل نظام متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

Graphing System of Linear Inequalities In Two Variables

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا؛ لتمثيل نظام المتباينات الخطّية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحلّ.

مثال

أُمثّل نظام المتباينات الخطّية الآتي بيانيًّا؛ باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحلّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

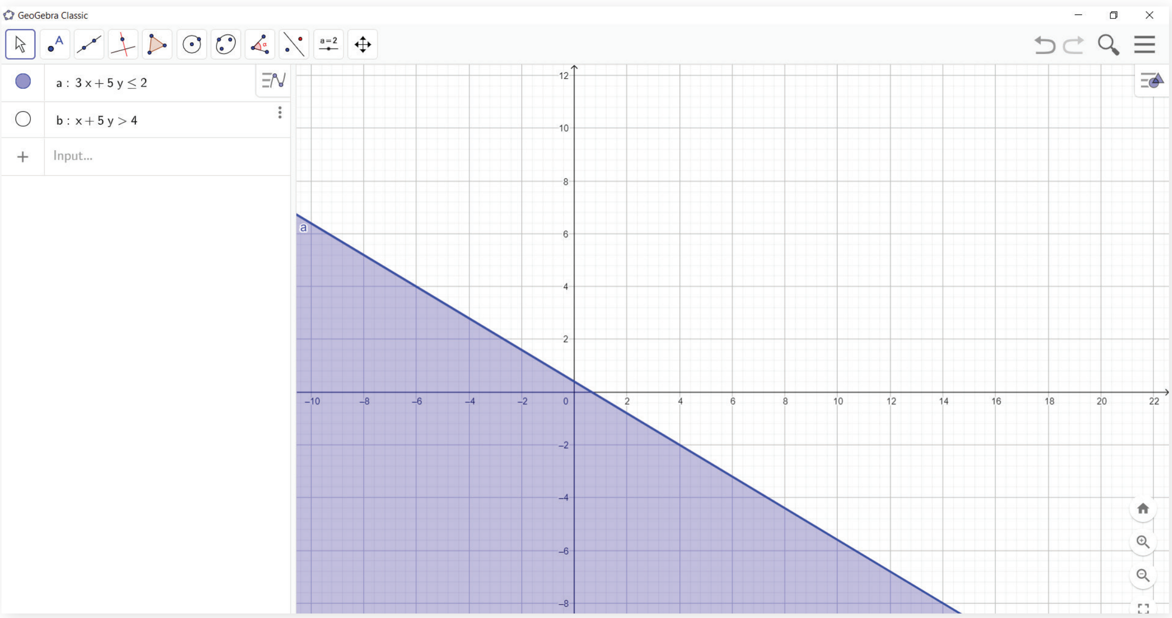
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: تمثيل المتباينة الأولى بيانيًّا.

أكتبُ المتباينة الأولى في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

3	x	+	5	y	≤	2

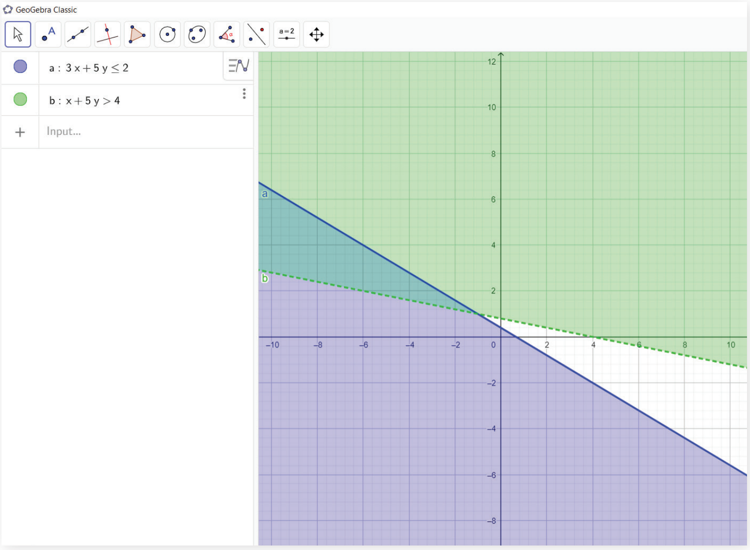
أُلاحظ أنّ برمجية جيوجبرا قد حدّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



الخطوة 2: تمثيل المتباينة الثانية بيانيًّا.

أكتبُ المتباينة الثانية في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

x	+	5	y	>	4

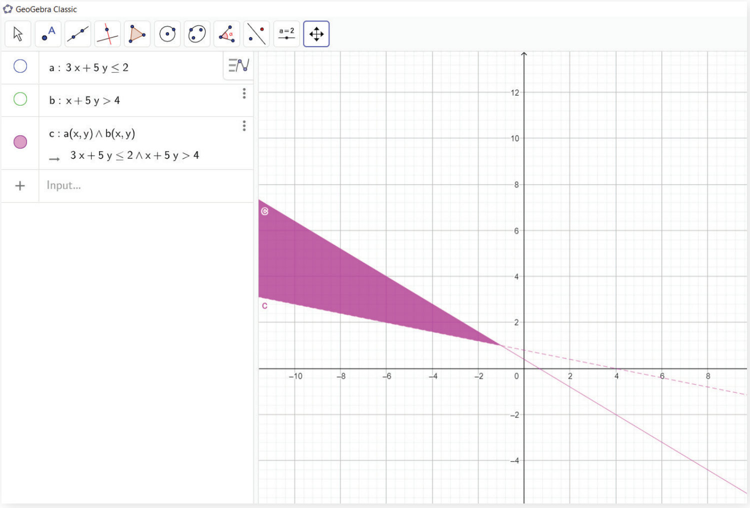


الخطـوة 3: تغيير اللـون الأزرق الذي حدّدته برمجية جيوجبـرا لمنطقة أُخرى؛ لتمييزها عن منطقة الحلّ الأولى.

أنقـر المتباينة المـراد تغيير لونها على يسـار الشاشـة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز ⋮ الـذي بجانبهـا، وأختـار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخر مثل الأخضر.

الخطوة 4: تفسير المناطق الظاهرة.

أُلاحظ وجـود 4 مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانيـة باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونيـن معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كلّ منطقة؟



الخطوة 5: تحديد منطقة الحلّ بشكل منفصل.

يُمكننـي تحديد منطقة الحلّ بشـكل منفصل عن المناطـق الأخرى، وذلـك بالضغط على زر اللون المجـاور لكلّ متباينة؛ ليختفي بذلك تظليـل المناطق، ثـم كتابة الصيغـة الآتية في شريط الادخال: $a\&\&b$

حيث تُمثل a وb اسـمَي المنطقتين الممثلتين للمتباينتين؛ لتظهر منطقة الحلّ بشكل منفصل كما في الشكل المجاور.

أتـدرب

أُمثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الخطّية الآتية بيانيًّا؛ باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدّد منطقة الحلّ:

1) $-5x - 2y \geq 3$
$x + y < -3$

2) $0.5x + 7y > -2$
$x < y$

3) $x - y \geq 0$
$x + y \leq 0$

4) $9x - 6y > 8$
$27x - 18y < 1$

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 إذا كان $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+2 & , x<3 \\ -2x^2+5x+7 & , x\geq 3 \end{cases}$ ،

فما قيمة $f(-2)$؟

a) -18 b) -11

c) 11 d) 22

2 ما قيمة: $|2(-2.5)-3| + 8$؟

a) 0 b) 10

c) 16 d) 19

3 ما حلّ المعادلة: $2|x-1| = 4$؟

a) 3 b) $3, -3$

c) $1, 3$ d) $-1, 3$

4 ما مجموعة حلّ $|2x+3| \leq 5$؟

a) $-4 \leq x \leq 1$ b) $x \leq -4$ or $x \geq 1$

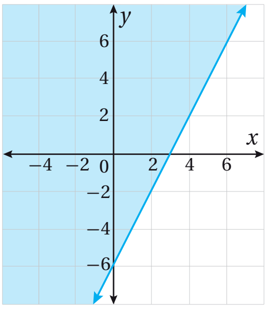
c) $1 \leq x \leq 4$ d) $x \leq 1$ or $x \geq 4$

5 أيّ الأزواج المرتّبة الآتية حلّ للمتباينة $2x - 3y \geq 6$؟

a) $(2, 3)$ b) $(1, 1)$

c) $(4, 1)$ d) $(5, 0)$

6 ما المتباينة الذي يُمثّلها الرسم البياني الآتي؟



a) $2x - y \leq 6$

b) $2x + y \leq 6$

c) $2x - y \geq 6$

d) $2x + y \geq 6$

7 أيّ أنظمة المتباينات الآتية ليس له حلّ؟

a) $3x + 5y \geq 15$
$2x + 3y \geq 6$

b) $x + 2y \geq 2$
$2x + 4y \leq 0$

c) $4x + 3y \geq 6$
$4x + 3y \leq 10$

d) $x + y \geq 6$
$x + y \geq 3$

أُمثّل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًّا:

8 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x<0 \\ -1 & , 0 \leq x \leq 3 \\ x^2-4 & , x>3 \end{cases}$

9 $f(x) = |3x - 12| + 2$

أحلّ كلًّا من المعادلات والمتباينات الآتية:

10 $3|2x+3|-2 = 10$

11 $|5-3x| = |5x+7|$

12 $|2x-3| \geq 9$

13 $|6+3x| \geq |5x-10|$

أُمثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

14 $x + 2y \leq 8$
$3x + 2y \leq 12$

15 $-1 \leq y \leq 4$
$y < 2x$

16 $y \geq -|x|$
$y < \frac{2}{5}x$

مسرح: ثمن التذكرة للمقاعد القريبة من منصّة مسرح JD 15، وللمقاعد الخلفية JD 10. بيعت في أحد العروض 100 تذكرة على الأكثر، وبلغت إيراداتها JD 1200 على الأقلّ.

17 أختار متغيّرين، وأكتب نظام متباينات خطّية يُمثّل هذه المعلومات.

18 أُمثّل نظام المتباينات بيانيًّا.

19 أستعمل التمثيل البياني لأجد 4 قيم ممكنة لعدد تذاكر المقاعد الخلفية المبيعة.

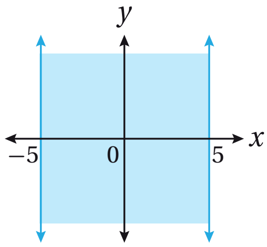
طرود خيرية: يريد تاجر مواد تموينية تشغيل عدد من العمال ليوم واحد لتجهيز طرود لبيعها في رمضان. أجرة العامل الماهر في هذا اليوم 30 دينارًا، والعامل المبتدئ 20 دينارًا، ولا يريد هذا التاجر أن يُنفق أكثر من 630 دينارًا لتجهيز الطرود. وقد وجد 15 عاملًا ماهرًا فقط، ويريد التاجر أن يُشغّل عاملًا ماهرًا واحدًا على الأقلّ مقابل كل 3 عمال مبتدئين. العامل الماهر يُجهّز 25 طردًا في الساعة، والمبتدئ يجهز 18 طردًا في الساعة.

20 أختار متغيّرين، وأكتب نظام متباينات خطّية يُمثّل هذه المعلومات.

21 أُمثّل نظام المتباينات بيانيًّا.

تدريب على الاختبارات الدولية

22 المتباينة التي لها التمثيل البياني الآتي، هي:



a) $|x| < 5$ b) $|x| \leq 5$

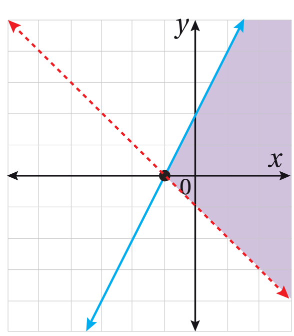
c) $|x| > 5$ d) $|x| \geq 5$

23 قِيَم x التي تحقق المعادلة $|x + 5| = 2$، هي:

a) $-3, 3$ b) $-3, 7$

c) $2, -2$ d) $-3, -7$

24 أيّ أنظمة المتباينات الآتية، لها التمثيل البياني الآتي؟



a) $y \leq 2x + 2$, $y > -x - 1$ b) $y \geq 2x + 2$, $y < -x - 1$

c) $y < 2x + 2$, $y \leq -x - 1$ d) $y > 2x + 2$, $y \leq -x - 1$

الوحدة

2

تحليل الاقترانات

Analyzing Functions

ما أهمّية هذه الوحدة؟

تُستعمل الاقترانات لنمذجة الكثير من التطبيقات الحياتية؛ لذا، من المهم فهم خصائصها وتحليلها. فمثلًا، يستعمل المهندسون خصائص الاقترانات لتصميم الطرق بشكل انسيابي لضمان قيادة المركبات بشكل آمن عليها، فهم يستعملون مفاهيم النهايات وخطوط التقارب لتصميم التقاطعات والمنعطفات.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية وبعض خواصّها.
- ✓ قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر؛ باستعمال القسمة الطويلة.
- ✓ الاقترانات المتشعّبة واقتران القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيًّا.
- ✓ تحليل المقادير الجبرية بالتجميع والتحليل.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◄ تحليل كثيرات حدود؛ باستعمال نظرية العوامل ونظرية الأصفار النسبية.
- ◄ كتابة مقادير نسبية بصورة مجموع كسور جزئية.
- ◄ تمثيل الاقترانات بيانيًّا؛ باستعمال تحويلات الانسحاب والتمدّد والانعكاس.
- ◄ إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا، والبحث في اتّصاله عند نقطة.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (11 و 12) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

فكرة الدرس تعرّف نظريتَي الباقي والعوامل، واستعمالهما لتحليل كثيرات الحدود وإيجاد أصفارها.

المصطلحات طريقة الجدول، نظرية الباقي، نظرية العوامل، أصفار الاقتران، نظرية الأصفار النسبية، معادلة كثير الحدود.

مسألة اليوم صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات أبعاده بالأمتار: 2 , x, $x^2+6x-19$. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$؟

القسمة باستعمال الجدول

تعلّمتُ سابقًا أنّ كثير الحدود بمتغيّر واحد يتكوّن من وحيد حدّ أو أكثر، وأنّ صورته العامّة هي:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب، و $a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ أعداد حقيقية.

ويُسمّى الاقتران على الصورة $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ اقتران كثير حدود، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad , \quad P(x) = 5 \quad , \quad P(x) = 2 - x$$

وتعلّمتُ أيضًا أنّه يُمكن قسمة كثير حدود على آخر باستعمال القسمة الطويلة. فمثلًا، يُمكن قسمة $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ على $x + 4$ كما يأتي:

ناتج القسمة

المقسوم

المقسوم عليه

$$\begin{array}{r l}
 & x^2 - 2x - 3 \\
x + 4 \,\big) & x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2} \\
 & \quad -2x^2 - 11x \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x} \\
 & \qquad\quad -3x - 12 \\
 & \qquad\quad \underline{-3x - 12} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

بالضرب في x^2
بالطرح
بالضرب في $-2x$
بالطرح
بالضرب في -3
بالطرح

باقي القسمة

أتعلّم

يُسمّى اقتران كثير الحدود أحيانًا (كثير حدود) فقط وذلك للاختصار.

أتذكّر

قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، أكتبُ المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية.

أتذكّر

تتوقّف عملية قسمة كثيرات الحدود، عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

طريقة الجدول (grid method): هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة.

مثال 1

أستعملُ طريقة الجدول؛ لأجد ناتج: $(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$ وأتحقّق من صحة الحلّ.

الخطوة 1: أُنشئ جدولًا من 4 أعمدة (درجة ناتج القسمة +2) و3 صفوف (درجة المقسوم عليه +2). أكتبُ حدود المقسوم عليه في العمود الأيسر وأُضيف خانة الباقي إلى منطقة العمل.

الباقي

ناتج القسمة

المقسوم عليه

$\times$				
$3x$				
-2				

منطقة العمل (مجموع الحدود فيها يساوي المقسوم)

أتعلّم

درجة كثير الحدود هي أكبر أُس للمتغيّر في حدوده جميعها، وعند قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر تكون درجة ناتج القسمة مساوية للفرق بين درجتَي المقسوم والمقسوم عليه.

الخطوة 2: أكتبُ الحدّ الرئيس من المقسوم ($9x^3$) في الخانة اليسرى العليا من منطقة العمل.

$\times$				
$3x$	$9x^3$			
-2				

الخطوة 3: أبحثُ عن حدّ جبري ناتج ضربه في $3x$ يساوي $9x^3$

بما أنّ ناتج ضرب $3x$ في $3x^2$ يساوي $9x^3$

إذن أكتبُ $3x^2$ أعلى الجدول.

$\times$	$3x^2$			
$3x$	$9x^3$			
-2				

الخطوة 4: أضربُ $3x^2$ في -2، وأكتبُ الناتج ($-6x^2$) في الخانة المناظرة للحدين المضروبين. وبما أنّ المقسوم في المسألة الأصلية لا يحتوي حدًّا من الدرجة الثانية؛ أُضيف $6x^2$ إلى منطقة العمل كي أحذف الحدّ $-6x^2$. إنّ إضافة $6x^2$ إلى منطقة العمل يُحدّد الحدّ الثاني من ناتج القسمة وهو ($2x$)؛ لأنّ ناتج ضرب $3x$ في $2x$ يساوي $6x^2$

$\times$	$3x^2$	$2x$		
$3x$	$9x^3$	$6x^2$		
-2	$-6x^2$			

أتذكّر

يُكتب المقسوم $9x^3 - x + 3$ على الصورة القياسية كما يأتي:

$9x^3 + 0x^2 - x + 3$

الخطـوة 5: أضربُ $2x$ في -2، وأكتبُ الناتج $-4x$ في منطقة العمل، وللحصول على الحـدّ ذي الدرجة 1 في المقسـوم (وهـو $-x$)، يجب إضافة $3x$ إلى $-4x$ في منطقة العمل. إنّ إضافة $3x$ يُحدّد الحدّ الأخير في ناتج القسمة وهو (1)؛ لأنّ ناتج ضرب $3x$ في 1 يساوي $3x$

$\times$	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	
-2	$-6x^2$	$-4x$		

الخطوة 6: أضـربُ 1 في -2، وأكتبُ الناتج -2 في الخانة المتبقية من منطقة العمل. وبما أنّني لم أحصل على قيمة مساوية للحدّ الأخير (الثابت) في المقسوم؛ فهذا يعني أنّني في حاجة إلى إضافة العدد 5 فـي خانة الباقي، لأن ناتج جمعه إلى العدد -2 يسـاوي (3)، وهو الحدّ الأخير (الثابت) في المقسوم، وعندئذ يكون باقي القسمة 5

$\times$	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2	

الباقي

إذن: ناتج القسمة هو: $3x^2 + 2x + 1$ والباقي 5، ويُمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2} = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{3x - 2}$$

أتحقّق من صحّة الحلّ:

يُمكنني التحقّق مـن صحّة الحلّ؛ بإيجاد مجمـوع الحدود في منطقة العمـل والتحقّق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$

أتحقّق من فهمي

أستعملُ طريقة الجدول؛ لأجد ناتج كلّ ممّا يأتي:

a) $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

b) $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

أتذكّر

مجموع الحدود في منطقة العمل يساوي المقسوم.

أتعلّم

بمـا أنّ المقسـوم كثيـر حـدود مـن الدرجـة 3 والمقسـوم عليـه كثيـر حدود درجته 1؛ فإنّ باقي القسـمة مـن الدرجة 0، وناتج القسمة من الدرجة 2

نظرية الباقي

أُلاحظ ممّا سبق، أنّه يُمكن إيجاد باقي قسمة كثير حدود مثل $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ على كثير حدود من الدرجة 1 مثل $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة.

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - x - 3 \\
x - 3 \big) & 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5 \\
(-) & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \quad -x^2 + 0x \\
 & \quad \underline{-x^2 + 3x} \\
 & \qquad -3x + 5 \\
 & \qquad \underline{-3x + 9} \\
 & \qquad\qquad \boxed{-4}
\end{array}
$$

الطريقة 2: طريقة الجدول.

$\times$	$2x^2$	$-x$	-3	
x	$2x^3$	$-x^2$	$-3x$	-4
-3	$-6x^2$	$3x$	9	

الباقي

ولكن، هل يُمكن إيجاد باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود من الدرجة 1 بطريقة أبسط؟

في المثال أعلاه، أُقارن بين باقي القسمة وهو -4، وقيمة $P(3)$

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ كثير الحدود المعطى

$P(3) = 2(3)^3 - 7(3)^2 + 5$ بتعويض $x = 3$

$= 54 - 63 + 5$ أضربُ

$= -4$ بالتبسيط

أُلاحظ أنّ قيمة $P(3)$ تساوي باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $x-3$، وهذا يقودنا إلى **نظرية الباقي** (remainder theorem).

نظرية الباقي

مفهوم أساسي

باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x - c)$ هو $P(c)$

وبصورة عامّة؛ فإنّ باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ هو $P(\frac{b}{a})$، حيث $a \neq 0$.

مثال 2

أستعمل نظرية الباقي؛ لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلّ ممّا يأتي:

1) $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2,\ h(x) = x - 3$

باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = (x-3)$ هو $P(3)$

$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$	كثير الحدود المعطى
$P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$	بتعويض $x = 3$
$= 27 + 63 - 18 + 2$	بالضرب
$= 74$	بالتبسيط

إذن: باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 74

2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9,\ h(x) = x + 2$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 2$؛ أكتبُ $h(x)$ على الصورة $h(x) = x - (-2)$ ليكون الباقي $P(-2)$.

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$	كثير الحدود المعطى
$P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$	بتعويض $x = -2$
$= -16 - 20 + 8 + 9$	بالضرب
$= -19$	بالتبسيط

إذن: باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -19

3) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1,\ h(x) = 2x - 1$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x - 1$؛ أكتبُ $h(x)$ على الصورة $h(x) = 2(x - \frac{1}{2})$، ليكون الباقي $P(\frac{1}{2})$.

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$	كثير الحدود المعطى
$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) + 1$	بتعويض $x = \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1$	بالضرب
$= -\frac{3}{4}$	بالتبسيط

إذن: باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

أتحقّق من فهمي

أستعملُ نظرية الباقي؛ لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كلّ ممّا يأتي:

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2,\ h(x) = x-1$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6,\ h(x) = x+3$

c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9,\ h(x) = 2x + 8$

نظرية العوامل

إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-k)$ يساوي 0، فإنّ:

$$\frac{f(x)}{x-k} = q(x)$$

حيث $q(x)$ كثير الحدود الناتج عن القسمة، ومنه فإنّ:

$$f(x) = (x-k)\,q(x)$$

هذا يعني أنّ $(x-k)$ عامل من عوامل $f(x)$، وهذا يوضّح **نظرية العوامل** (factor theorem)، التي تُعدّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي **نظرية العوامل**

يكون $(x-c)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(c) = 0$.

وبصورة عامّة: يكــون $(ax-b)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ حيث $a \neq 0$.

إذا عُلم أحــد عوامل كثير الحدود؛ فإنّه يمكن تحليله تحليلًا كاملًا، وذلك بكتابته على صورة حاصل ضــرب مجموعة من كثيرات الحــدود التي لا يُمكن تحليلها (مــن الدرجة 1 أو من الدرجة 2 وليس لها أصفار).

مثال 3

إذا كان $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

1 **أُبيّن أنّ $x+4$ عامل من عوامل $P(x)$.**

يكون $x+4$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(-4) = 0$؛ لذا، أجد $P(-4)$

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ كثير الحدود المعطى

$P(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$ بتعويض $x = -4$

$= -64 + 96 - 20 - 12$ بالضرب

$= 0$ بالتبسيط

إذن: $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$.

2 **أُحلّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.**

بما أنّ $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$؛ فإنّه يُمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x + 4$، ثمّ تحليل كثير الحدود الناتج إن أمكن.

$\times$	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$8x$	-12	

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ كثير الحدود المعطى

$= (x + 4)(x^2 + 2x - 3)$ التحليل باستعمال القسمة

$= (x + 4)(x + 3)(x - 1)$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن: $P(x) = (x + 4)(x + 3)(x - 1)$

أتحقّق من فهمي

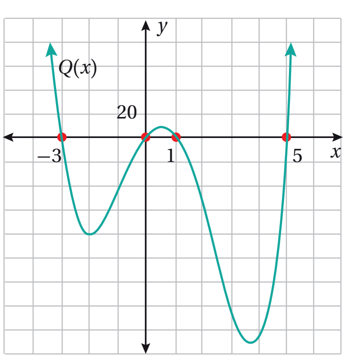
إذا كان $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10}$

a) أُبيّن أنّ $x - 5$ عامل من عوامل $P(x)$.

b) أُحلّل $P(x)$ تحليلًا كاملًا.

الأصفار النسبية

أصفار **كثير الحدود** (zeros of a polynomial) هي قِيَم x التي يكون عندها $P(x) = 0$، وعند تمثيل كثير الحدود بيانيًّا؛ فإنّ أصفاره هي إحداثيات x لنقاط تقاطع منحناه مع المحور x. فمثلًا، لكثير الحدود $Q(x)$ المعطى تمثيله البياني جانبًا، توجد 4 أصفار هي: $-3, 0, 1, 5$ ويقطع عندها منحناه المحور x.



يُمكن استعمال **نظرية الأصفار النسبية** (rational zero theorem) لإيجاد بعض الأصفار المحتملة لكثيرات الحدود لاختبارها.

نظرية الأصفار النسبية

مفهوم أساسي

إذا كان $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته **أعداد صحيحة**؛ فإنّ كلّ صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون على الصورة $\frac{p}{q}$، حيث p أحد عوامل الحدّ الثابت (a_0)، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية

إذا كان $a_n = 1$؛ فإنّ كلّ صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحدّ الثابت (a_0).

أتعلّم

عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته.

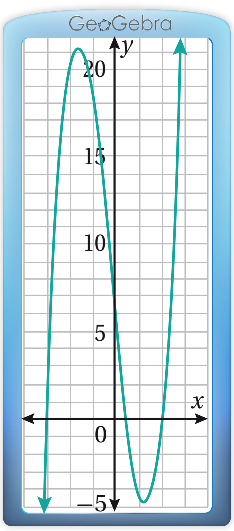
عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، يُمكن إيجاد أصفاره الأخرى باستعمال القسمة والتحليل.

مثال 4

1 **أجد أصفار كثير الحدود $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ جميعها.**

الدعم البياني

يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا، لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. ألاحظ أنّ منحنى $P(x)$ يقطع محور x في 3 نقاط؛ ما يعني أنّ $P(x)$ له 3 أصفار، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدّ الثابت (6) وهي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

أجد عوامل المعامل الرئيس (2) وهي: $\pm1, \pm2$

إذن: الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

أتذكّر

لأجد الأصفار النسبية المحتملة، أقسمُ عوامل الحدّ الثابت على عوامل المعامل الرئيس، ثمّ أكتبُ الأصفار النسبية المحتملة بأبسط صورة.

الخطوة 2: أُنشئ جدولًا لأختبر بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{p}{q}$	$P\left(\frac{p}{q}\right)$	هل $\frac{p}{q}$ صفر لكثير الحدود؟
-1	$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	✗
1	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	✗
2	$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$	✓

بما أنّ $P(2) = 0$؛ فإنّه يوجد لكثير الحدود صفر عند $x = 2$، إذن: $x-2$ عامل من عوامل $P(x)$.

أتعلّم

أتوقّف عن التعويض؛ عندما أجد أول صفر لكثير الحدود.

الخطوة 3: أُحلّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أنّ $x-2$ عامل من عوامل $P(x)$؛ يُمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x-2$ ثمّ تحليل كثير الحدود الناتج إن أمكن:

$\times$	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

ناتج القسمة يساوي $2x^2+5x-3$. ومنه، يُمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ كثير الحدود المعطى

$= (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$ التحليل باستعمال القسمة

$= (x-2)(2x-1)(x+3)$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن: $P(x) = (x-2)(2x-1)(x+3)$

ومنه، فإنّ أصفار $P(x)$ الناتجة عن تحليله هي: $2, \frac{1}{2}, -3$

أتعلّم

أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كلّ عامل من عوامله بالصفر.

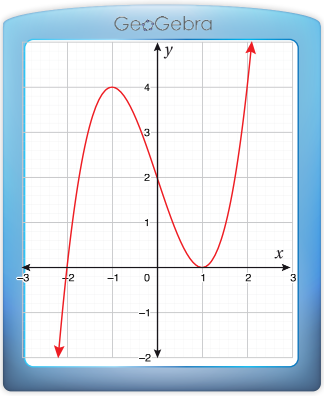
$x-2=0 \rightarrow x=2$

$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x+3=0 \rightarrow x=-3$

2 أجد أصفار كثير الحدود $P(x) = x^3 - 3x + 2$ جميعها.

الدعم البياني



يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. أُلاحظ أنّ منحنى كثير الحدود يقطع محور x في نقطتين؛ ما يعني أنّ $P(x)$ له صفران. ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بما أنّ معامل الحدّ الرئيس 1؛ فإنّ الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحدّ الثابت الذي يساوي (2).

إذن: الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1, \pm2$$

الخطوة 2: أُنشئ جدولًا لأختبر بعض الأصفار النسبية المحتملة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
-1	$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$	✗
1	$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$	✓

بما أنّ $P(1) = 0$، إذن: يوجد لكثير الحدود صفر عند $x = 1$، إذن: $x-1$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أنّ $x-1$ عامل من عوامل $P(x)$؛ فإنّه يُمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x-1$ ثمّ تحليل كثير الحدود الناتج إن أمكن:

$\times$	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي x^2+x-2 . ومنه، يُمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$$P(x) = x^3 - 3x + 2$$ كثير الحدود المعطى

$$= (x-1)(x^2+x-2)$$ التحليل باستعمال القسمة

$$= (x-1)(x+2)(x-1)$$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن: $P(x) = (x+2)(x-1)(x-1)$

ومنه، فإنّ أصفار $P(x)$ الناتجة عن تحليله هي: $-2, 1$

أتحقّق من فهمي

أجد أصفار كثيرات الحدود الآتية جميعها:

a) $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

b) $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

حلّ معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود (polynomial equation) هي معادلة يُمكن كتابتها على صورة $P(x) = 0$، حيث $P(x)$ كثير حدود من أيّ درجة، ويُسمّى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة. يُمكن حلّ بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التي تعلّمتُها سابقًا، مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، إلّا أنّ بعض معادلات كثيرات الحدود لا يُمكن حلّها باستعمال هذه الطرائق، وعندئذ يُمكن استعمال نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أصفار كثير الحدود المرتبط بالمعادلة وتحليها.

أتعلّم

المعادلات الخطية والتربيعية والتكعيبية التي تعلّمتُها سابقًا، هي حالات خاصة من معادلة كثير الحدود.

مثال 5

أحلّ المعادلة $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

كثيـر الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$، وبما أنّه لا توجد طريقة واضحة لتحليله مثل إخراج العامل المشترك أو التجميع، أجد أحد أصفاره النسبية ثمّ أُحلّله.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أنّ معامل الحدّ الرئيس (1)؛ فإنّ الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحدّ الثابت والذي يساوي (24).

إذن: الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$$

الخطوة 2: أُنشئ جدولًا لأختبر بعض الأصفار النسبية المحتملة.

هل p صفر لكثير الحدود؟	$P(p)$	p
✗	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	1
✓	$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	2

بما أنّ $P(2) = 0$؛ فإنّه يوجد لكثير الحدود صفر عند $x = 2$، إذن: $x-2$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية، ثمّ أحلّ المعادلة.

بما أنّ $x - 2$ أحد عوامل كثير الحدود؛ فإنّه يُمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x-2$، ثمّ تحليل كثير الحدود الناتج إن أمكن:

$\times$	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

ناتج القسمة يساوي $x^2 + x - 12$. ومنه، يُمكن تحليل كثير الحدود وحلّ المعادلة كما يأتي:

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$ التحليل باستعمال القسمة

$(x-2)(x+4)(x-3) = 0$ بتحليل ثلاثي الحدود

$x-2 = 0 \quad or \quad x+4 = 0 \quad or \quad x-3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 2 \qquad x = -4 \qquad x = 3$ بحلّ كلّ معادلة

إذن: حلول المعادلة هي: $x = 2, x = -4, x = 3$

أتحقّق من فهمي أحلّ كلّ معادلة ممّا يأتي:

a) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

يُمكن نمذجة الكثير من المواقف الحياتية والعلمية؛ باستعمال معادلات كثيرات حدود يتطلّب حلّها استعمال نظرية الأصفار النسبية.

مثال 6 : من الحياة

هندسة العمارة: صنع مهندس معماري نموذجًا لبناية على هيئة هرم قاعدته مربّعة الشكل؛ باستعمال طابعة ثلاثة الأبعاد. فإذا كان ارتفاع النموذج يقل 2 dm عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه $25\ dm^3$، فما أبعاد النموذج؟

الخطوة 1: أستعملُ قانون حجم الهرم لأكتب معادلة.

بما أنّ قاعدة الهرم مربّعة؛ أفرض أنّ طول ضلعها x dm. ومنه، فإنّ مساحتها x^2، وبما أنّ ارتفاع الهرم يقل 2 dm عن طول ضلع القاعدة؛ فإنّ ارتفاع الهرم $(x-2)$ dm.

حجم الهرم V	=	$\frac{1}{3}$	×	مساحة القاعدة B	×	الارتفاع h
25	=	$\frac{1}{3}$	×	x^2	×	$(x-2)$

$x^3 - 2x^2 = 75$ بضرب طرفي المعادلة في 3

$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$ بطرح 75 من طرفَي المعادلة

الخطوة 2: أجد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة وهو $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$

بما أنّ معامل الحدّ الرئيس 1؛ فإنّ الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحدّ الثابت والذي يساوي (75).

معلومة

الطباعة الثلاثية الأبعاد، هي عملية صنع نماذج صلبة ثلاثية الأبعاد رُسمت على الحاسوب؛ عن طريق وضع طبقات متتالية من المادّة الخام حتى يكتمل إنشاء النموذج.

أتذكّر

حجم الهرم (V) يساوي ثلث مساحة قاعدته B في ارتفاعه (h)

إذن: الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm1\ ,\ \pm3\ ,\ \pm5\ ,\ \pm15\ ,\ \pm25\ ,\ \pm75$$

الخطوة 3: أُنشئ جدولًا لأختبر بعض الأصفار النسبية المحتملة.

بما أنّ الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، إذن: أختبرُ الأصفار النسبية الموجبة فقط.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
3	$P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 75 = -66$	✗
5	$P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0$	✓

الخطوة 4: أُحلّل المعادلة باستعمال الأصفار النسبية، ثم أحلّها.

بما أنّ $x - 5$ أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بالمعادلة؛ فإنّه يُمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x - 5$، ثم تحليل كثير الناتج إن أمكن:

$\times$	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

ناتج القسمة يساوي $x^2 + 3x + 15$. ومنه، يُمكن حل المعادلة كما يأتي:

$$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$$ المعادلة الأصلية

$$(x-5)(x^2 + 3x + 15) = 0$$ التحليل باستعمال القسمة

$$x - 5 = 0 \quad or \quad x^2 + 3x + 15 = 0$$ خاصّية الضرب الصفري

بما أنّ العامل التربيعي $x^2 + 3x + 15$ مميّزه سالب فلا يوجد له أصفار؛ لذا، فإنّ $x = 5$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

إذن: طول قاعدة النموذج 5 dm، وارتفاعه 3 dm

إرشاد

بما أنّ الارتفاع $x - 2$؛ فهذا يدلّ على أنّ $x > 2$؛ لذا، أختبرُ الأصفار النسبية التي تزيد عن 2

أتذكّر

مميّز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو:
$\Delta = b^2 - 4ac$

أتحقّق من فهمي

يزيد ارتفاع أسطوانة 5 cm على طول نصف قطر قاعدتها. إذا كان حجم الأسطوانة $72\pi\ cm^3$؛ فما طول نصف قطر قاعدتها وارتفاعها؟

أتدرّب وأحلّ المسائل

أستعملُ طريقة الجدول؛ لأجد ناتج القسمة والباقي في كلّ ممّا يأتي:

1) $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

2) $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

أستعملُ نظرية الباقي؛ لأجد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كلّ ممّا يأتي:

3) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6,\ h(x) = x + 1$

4) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8,\ h(x) = 3x + 4$

أُبيّن أنّ $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ في كلّ ممّا يأتي:

5) $f(x) = x^3 - 37x + 84,\ h(x) = x + 7$

6) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6,\ h(x) = 2x - 3$

أُحلّل كلّ اقتران ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

8) $g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

9) $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

10) $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

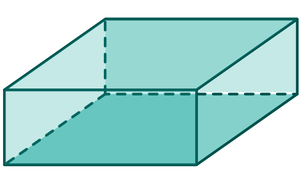
11) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

12) $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

13) $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

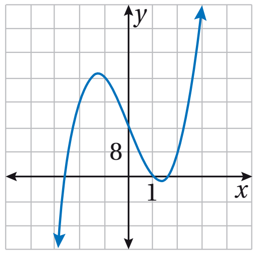
14) $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

15) يُمثّل الاقتران $V(x) = 2x^3 + 5x^2 - 19x - 42$ حجم متوازي المستطيلات المجاور. أكتبُ كثير حدود بالصورة القياسية يُمثّل المساحة الكلية لسطح متوازي المستطيلات.

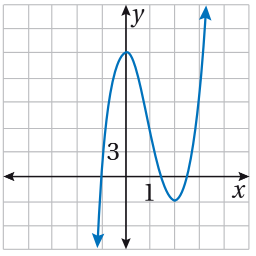


أستعملُ التمثيل البياني لمنحنى كلّ اقتران مما يأتي؛ لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمّ أجد أصفار الاقتران جميعها:

16) $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$



17) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$



18 إذا كان $x = 1, x = 4$ هما حلّان للمعادلة $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$، فأجد الحلّ الثالث لها.

19 إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x - 1$ يساوي مثلَي باقي قسمته على $x + 1$، فما قيمة a؟

20 **منحوتات جليدية:** تُصنع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق ملء قالب بالماء ثمّ تجميده. إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مربّعة الشكل، ارتفاعها يزيد 1 m على طول قاعدتها، أجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها $4\ m^3$

ليكن $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$، حيث a, b ثوابت و $a, b \neq 0$

21 إذا كان $(x - 3)$ عاملًا من عوامل الاقتران $f(x)$؛ فأُبيّن أنّ $3a + b = 4$

22 إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي -15؛ فأُبيّن أنّ $2a + b = 3$

23 أجد قيمة كلّ من a، وb.

24 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

25 **مسألة مفتوحة:** أكتبُ اقترانًا من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x + 1)$ يساوي -8.

26 **أكتشفُ الخطأ:** أوجدت سهام الأصفار النسبية المحتملة للاقتران $f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$، وكان حلّها كالآتي:

$$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{8} \quad ✗$$

أُبيّن الخطأ الذي وقعت فيه وأُصحّحه.

27 **تحدّ:** أجد ناتج قسمة $4x^3 + 8x^2 - 41x + 28$ على $x^2 + 3x - 4$ باستعمال طريقة الجدول.

28 **تحدّ:** أُحلّل المقدار $x^{13} - 15x^9 - 16x^5$

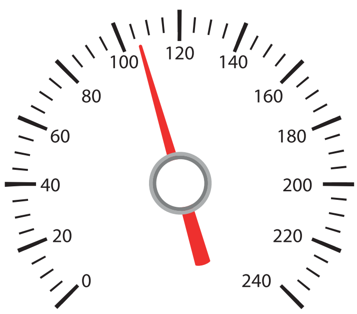
الدرس 2

الكسور الجزئية
Partial Fractions

فكرة الدرس كتابة الاقتران النسبي، الذي يُمكن تحليل مقامه بصورة مجموع اقترانات نسبية أبسط.

المصطلحات تجزئة المقادير النسبية، كسر جزئي.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتران $v = \frac{t^2 - 5t + 6}{(t+2)(t^2-1)}$، العلاقة بين سرعة سيارة v بالكيلومتر لكل ساعة والزمن t بالساعات. هل يُمكن كتابة الاقتران v على صورة مجموع مقدارين جبريّين نسبيّين مقام أحدهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1)؟



تعلّمتُ سابقًا أنّ المقدار الجبري النسبي هو كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود، وتعلّمتُ أيضًا أنّه عند جمع مقدارين نسبيين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب توحيد مقاميهما أولًا باستعمال المضاعف المشترك الأصغر(م. م. أ) للمقامين كما يأتي:

$$\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)} - \frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$ بتوحيد المقامين

$$= \frac{3x+6-2x+8}{(x-4)(x+2)}$$ بطرح البسطين

$$= \frac{x+14}{(x-4)(x+2)}$$ بالتبسيط

تجزئة المقادير النسبية (decomposition of rational expression) هي عملية عكسية للعملية السابقة، وينتج عنها كتابة المقدار النسبي على صورة مجموع مقادير نسبية أُبسّط كلًّا منها على صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيرا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقلّ من درجة Q، ويُسمّى كلّ من هذه المقادير النسبية **كسرًا جزئيًّا** (partial fraction).

كسر جزئي   كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

تعتمد عملية تجزئة المقادير الجبرية النسبية على عوامل المقام، وسأتعلّم في هذا الدرس ثلاث حالات مختلفة من التجزئة حسب نوع عوامل المقام، وهي:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطّية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطّية أحدها مكرّر.
- عوامل المقام كثيرات حدود أحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مميّزه سالب).

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية مختلفة

إذا كانت عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي جميعها خطّية؛ فإنّه ينتج عن كلّ منها كسر جزئي بسطه ثابت ومقامه العامل الخطّي على الصورة الآتية:

ثابت

$$\frac{A}{ax+b}$$

عامل خطّي

مفهوم أساسي

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية مختلفة.

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يُمكن تحليله تحليلًا كاملًا من دون تكرار أيّ عامل على الصورة الآتية:

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)(a_3 x + b_3)\ldots(a_n x + b_n)$$

فإنّه يُمكن تجزئة المقدار الجبري النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث درجة P أقل من درجة Q، على الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

مثال 1

أُجزّئ $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: أُحلّل المقام تحليلًا كاملًا.

$$\frac{2x-13}{x^2-x-2} = \frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي؛ باستعمال رموز تُمثّل قِيَمًا مجهولة.

أكتبُ كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطّيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمّ أكتبُ رمزًا في بسط كلّ كسر.

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

الخطوة 3: أضربُ طرفَي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامَي الكسرين الجزئيّين.

بضرب طرفَي المعادلة في (م.م.أ) لمقامَي الكسرين الجزئيّين وهو $(x-2)(x+1)$:

$$(x-2)(x+1)\,\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = (x-2)(x+1)\left(\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}\right)$$

باستعمال خاصّية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار:

$$\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}\,\frac{2x-13}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}} = \cancel{(x-2)}(x+1)\,\frac{A}{\cancel{(x-2)}} + (x-2)\cancel{(x+1)}\,\frac{B}{\cancel{(x+1)}}$$

المعادلة الناتجة هي:

$$2x-13 = A(x+1) + B(x-2)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلّ من الثابتين A وB؛ باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة

$$2(2)-13 = A(2+1) + B(2-2)$$ بتعويض $x = 2$

$$-9 = 3A$$ بالتبسيط

$$A = -3$$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

أتعلّم

تعويض $x = 2$ يحذف المتغيّر B ويجعل المعادلة بمتغيّر واحد وهو A، ما يجعل إيجاد قيمته ممكنًا.

- بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة

بتعويض $x = -1$	$2(-1) - 13 = A(-1 + 1) + B(-1 - 2)$
بالتبسيط	$-15 = -3B$
بقسمة طرفَي المعادلة على -3	$B = 5$

إذن: يُمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{2x - 13}{(x-2)(x+1)} = \frac{-3}{(x-2)} + \frac{5}{(x+1)}$$

أتعلّم

تعويض $x = -1$ يحذف المتغيّر A ويجعل المعادلة بمتغيّر واحد وهو B، ما يجعل إيجاد قيمته ممكنًا.

أتحقّق من فهمي

أُجزّئ كلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

a) $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}$

أتعلّم

إذا كان مقام المقدار النسبي كثير حدود من الدرجة الثالثة فتحليله يكون إمّا بإخراج عامل مشترك، وإمّا باستعمال التجميع، وإمّا باستعمال نظرية الأصفار النسبية ونظرية العوامل.

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية أحدها مكرّر.

في بعض الحالات ينتج عن التحليل الكامل لمقام المقدار النسبي، تكرار أحد العوامل الخطّية.

مفهوم أساسي **تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية أحدها مكرّر**

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا نسبيًّا وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل خطّي مكرّر n من المرّات، ودرجة P أقلّ من درجة Q؛ فإنّه يُمكن تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ على الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

مثال 2

أُجزّئ $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: أُحلّل المقام تحليلًا كاملًا.

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{-x^2+2x+4}{x(x^2-4x+4)}$$ بإخراج x عاملًا مشتركًا

$$= \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)(x-2)}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي؛ باستعمال رموز تُمثّل قِيَمًا مجهولة.

أكتبُ ثلاث كسور جزئية مقاماتها عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمّ أكتب رمزًا في بسط كلّ كسر. أُلاحظ أنّ تحليل المقام هو $x(x-2)^2$، وأنّ العامل $(x-2)$ مكرّر مرّتين في هذا التحليل؛ لذا، يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي: $x, (x-2), (x-2)^2$

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

الخطوة 3: أضربُ طرفَي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفَي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية وهو $x(x-2)^2$:

$$x(x-2)^2\,\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = x(x-2)^2\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

باستعمال خاصّية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار؛ تنتج المعادلة الآتية:

$$-x^2+2x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلّ من الثوابت A و B و C؛ باستعمال التعويض.

- بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة.

$$-(0)^2 + 2(0) + 4 = A(0-2)^2 + B(0)(0-2) + C(0)$$ بتعويض $x=0$

$$4 = 4A$$ بالتبسيط

$$A = 1$$ بقسمة طرفَي المعادلة على 4

أتعلّم

أتجنّب الخطأ الشائع الآتي:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \cancel{\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-2}}$$

تكرار العامل الخطّي من دون استعمال القوة، لا يعطي تجزئة صحيحة للمقدار النسبي.

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة.

بتعويض $x = 2$ $$-(2)^2 + 2(2) + 4 = A(2-2)^2 + B(2)(2-2) + C(2)$$

بالتبسيط $$4 = 2C$$

بقسمة طرفَي المعادلة على 2 $$C = 2$$

- بتعويض أيّ قيمة أخرى للمتغيّر x (مثلًا $x = 1$) في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتَي A وC الناتجتين.

بتعويض $A = 1,$ $C = 2,$ $x = 1$ $$-(1)^2 + 2(1) + 4 = (1)(1-2)^2 + B(1)(1-2) + (2)(1)$$

بالتبسيط $$5 = 3 - B$$

بطرح 3 من طرفَي المعادلة $$2 = -B$$

بقسمة طرفَي المعادلة على -1 $$B = -2$$

إذن: يُمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

أتعلّم

لا يمكن تعويض $x = 0$ أو $x = 2$ في المعادلة الناتجة؛ لأنّ ذلك سيحذف قيمة B المطلوب إيجادها.

أتحقّق من فهمي

أُجزّئ $\frac{x^2 + 8x + 4}{x^3 - 2x^2}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي أحد عوامل مقامه كثير حدود تربيعي غير مكرّر لا يُمكن تحليله.

تعلّمتُ في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية عوامل مقاماتها جميعها خطّية، ولكن في بعض الحالات، قد يحتوي تحليل المقام عاملًا تربيعيًّا لا يُمكن تحليله، وفي هذه الحالة ينتج عن العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثير حدود خطّي على الصورة $Ax + B$ ومقامه العامل التربيعي.

مفهوم أساسي

تجزئة مقدار نسبي أحد عوامل مقامه تربيعي غير مكرّر لا يُمكن تحليله

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا جبريًّا نسبيًّا وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل تربيعي غير مكرّر لا يُمكن تحليله، ودرجة P أقلّ من درجة Q؛ فإنّه يُمكن تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ على الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

مثال 3

أُجزّئ $\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)}$ إلى كسور جزئية.

بما أنّ المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يُمكن تحليله، إذن: سيكون بسط أحد الكسور الجزئية ثابتًا، والآخر مقدارًا خطيًّا.

الخطوة 1: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، بحيث أكتبُ ثابتًا في بسط العامل الخطي ومقدارًا خطيًّا في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+9)}$$

الخطوة 2: أضرب طرفَي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامَي الكسرين الجزئيّين.

بضرب طرفَي المعادلة في (م.م.أ) لمقامَي الكسرين الجزئيّين وهو $(x+1)(x^2+9)$:

$$(x+1)(x^2+9)\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)} = (x+1)(x^2+9)\left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+9)}\right)$$

باستعمال خاصّية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار؛ تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2 - 3x + 16 = A(x^2+9) + (Bx + C)(x+1)$$

الخطوة 3: أجد قيمة كلّ من الثوابت A و B و C باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة.

$(-1)^2 - 3(-1) + 16 = A((-1)^2 + 9) + (B(-1) + C)(-1+1)$ بتعويض $x = -1$

$20 = 10A$ بالتبسيط

$A = 2$ بقسمة طرفَي المعادلة على 10

- بتعويض $x = 0$ وقيمة A في المعادلة الناتجة.

بتعويض $x = 0, A = 2$	$(0)^2 - 3(0) + 16 = 2((0)^2 + 9) + (B(0) + C)(0 + 1)$
بالتبسيط	$16 = 18 + C$
بطرح 18 من طرفَي المعادلة	$C = -2$

- بتعويض أيّ قيمة أخرى للمتغيّر x (مثلًا $x = 1$) في المعادلة الناتجة، إضافة إلى تعويض قيمتَي A و C الناتجتين.

بتعويض $x = 1$, $A = 2, C = -2$	$(1)^2 - 3(1) + 16 = 2((1)^2 + 9) + (B(1) + (-2))(1 + 1)$
بالتبسيط	$14 = 2B + 16$
بطرح 16 من طرفَي المعادلة	$-2 = 2B$
بقسمة طرفَي المعادلة على 2	$B = -1$

إذن: يُمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{x^2 - 3x + 16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

أتحقّق من فهمي

أُجزّئ $\frac{21 - 7x}{(x+5)(x^2+3)}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي درجة كثير الحدود في بسطه، مساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها.

تعلّمتُ في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية مختلفة، على صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيرا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقلّ من درجة Q، ولكن إذا كانت درجة P مساوية لدرجة Q أو أكبر منها؛ فيجب أولًا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة وذلك بقسمة P على Q.

مثال 4

أُجزّئ $\dfrac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ **إلى كسور جزئية.**

بما أنّ درجة البسط مساوية لدرجة المقام؛ إذن: أقسمُ البسط على المقام أولًا، ثمّ أُجزّئ.

الخطوة 1: أقسمُ البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثمّ أكتبُ الكسر الناتج بصورة مجموع ناتج القسمة إلى كسر يُمثّل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2+6x-16 \overline{\big)\, 2x^2+13x+6} \\ \underline{(-)\ 2x^2+12x-32} \\ x+38 \end{array}$$

إذن: ناتج القسمة 2 والباقي $x+38$ ومنه:

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2+\frac{x+38}{x^2+6x-16}$$

الخطوة 2: أُحلّل **مقام باقي القسمة** تحليلًا كاملًا، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثّل قِيَمًا مجهولة.

أكتبُ كسرين جزئيين مقاماهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمّ أكتبُ رمزًا في بسط كلّ منهما.

$$\frac{x+38}{x^2+6x-16} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}$$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8}+\frac{B}{x-2}$$

الخطوة 3: أضربُ طرفَي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

بضرب طرفَي المعادلة في (م.م.أ) للمقام وهو $(x+8)(x-2)$:

$$(x+8)(x-2)\,\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = (x+8)(x-2)\left(\frac{A}{x+8}+\frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصّية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار؛ تنتج المعادلة الآتية:

$$x+38 = A(x-2)+B(x+8)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كلّ من الثابتين A وB باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = -8$ في المعادلة الناتجة.

$$-8 + 38 = A(-8-2) + B(-8+8) \quad \text{بتعويض } x=-8$$

$$30 = -10A \quad \text{بالتبسيط}$$

$$A = -3 \quad \text{بقسمة طرفَي المعادلة على } -10$$

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة.

$$2 + 38 = A(2-2) + B(2+8) \quad \text{بتعويض } x=2$$

$$40 = 10B \quad \text{بالتبسيط}$$

$$B = 4 \quad \text{بقسمة طرفَي المعادلة على } 10$$

إذن: يُمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2 + 13x + 6}{x^2 + 6x - 16} = 2 + \frac{-3}{x+8} + \frac{4}{x-2}$$

أتحقّق من فهمي

أُجزّئ $\frac{3x^2 + 12x + 4}{x^2 + x}$ إلى كسور جزئية.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أُجزّئ كلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$

2) $\frac{2x+22}{x^2+2x}$

3) $\frac{4x-30}{x^2-8x+15}$

4) $\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

5) $\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$

6) $\frac{x}{8x^2-10x+3}$

7) $\frac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$

8) $\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

9) $\frac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}$

10) $\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

11) $\frac{7x-3}{x^2-8x+16}$

12) $\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

13) $\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

14) $\frac{x-3}{x^3+3x}$

15) $\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

16) $\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}$

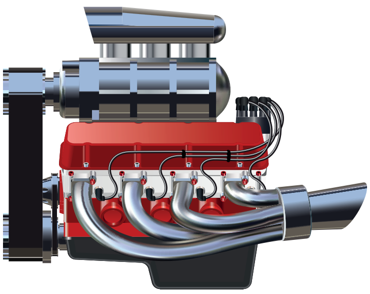
17) $\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

18) $\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

19 أُبيِّن أنّه يُمكن كتابة $\frac{1}{x^2 - a^2}$ بالصورة $\frac{1}{2a(x+a)} - \frac{1}{2a(x-a)}$ حيث a عدد حقيقي.

20 إذا كان $\frac{3p}{(x+3)^2} - \frac{p}{x+3} = \frac{5x}{(x+3)^2}$ ؛ فأجد قيمة p .

21 إذا كان $\frac{8p}{3(x-1)^2} + \frac{p}{9(x-1)} - \frac{px - 37}{9(x^2+2)} = \frac{x^2 + 8x + 7}{(x-1)^2(x^2+2)}$ ؛ فأجد قيمة p .



هندسة ميكانيكية: يُستعمل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم محرّك ديزل:

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}, 0 \leq x \leq 1}$$

حيث x مقدار جهد المحرّك، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت.

22 أُجزّئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

23 إذا كان $R(x)$ يُمثّل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقلّ درجة حرارة للعادم. أجد كلًّا من الاقترانين مستعينًا بالفرع السابق.

24 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

تحدّ: أُجزّئ كلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

27 $\frac{3x^3 + 12x - 20}{x^4 - 8x^2 + 16}$

26 $\frac{2x^2 + 6x - 5}{(x-2)^3}$

25 $\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x^4}$

28 أكتشفُ الخطأ: بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\frac{5x+2}{(x+3)^2}$ كالآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+3}$$

أُحدّد الخطأ الذي وقعت فيه وأُصحّحه.

29 تبرير: إذا كان $\frac{B}{x+1} + \frac{A}{x-1} = \frac{ax+b}{x^2-1}$ ؛ فأجد قيمة كلّ من A و B بدلالة المتغيرين a و b، مبررًا إجابتي.

30 مسألة مفتوحة: أكتبُ اقترانًا نسبيًّا بالصورة $\frac{f(x)}{g(x)}$ بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية، على عوامل خطّية غير مكرّرة.

الدرس 3

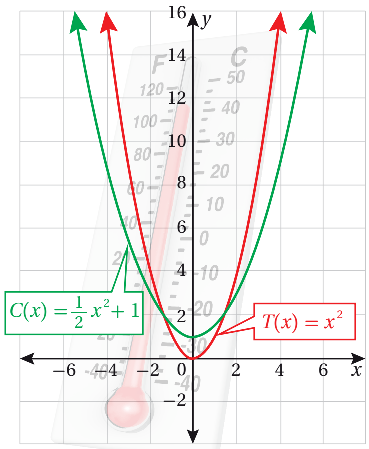
التحويلات الهندسية للاقترانات

Transformations of Functions

فكرة الدرس رسم منحنيات اقترانات؛ باستعمال التحويلات الهندسية، وكتابة معادلة التحويل لمنحنى معطى.

المصطلحات عائلة الاقترانات، الاقتران الرئيس، الانسحاب الرأسي، الانسحاب الأُفقي، الانعكاس، التمدّد الرأسي، التمدّد الأُفقي.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتران $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ درجة الحرارة $^\circ C$ في أحد أيام الشتاء في مدينة الشوبك، ويُمثّل الاقتران $T(x) = x^2$ درجة الحرارة في مدينة السلط في اليوم نفسه، حيث x عدد الساعات بعد شروق الشمس. بالنظر إلى التمثيل البياني للاقترانين الذي يظهر جانبًا، ما العلاقة بين منحنيي الاقترانين $C(x)$ و $T(x)$؟



الاقترانات الرئيسة

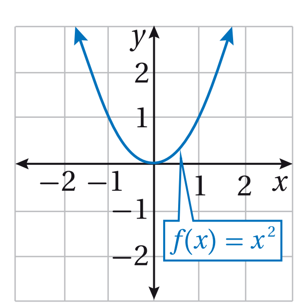
عائلة الاقترانات (family of functions): هي مجموعة الاقترانات التي تتشابه منحنياتها في صفة واحدة أو أكثر، ويُسمّى أبسط اقترانات هذه العائلة **الاقتران الرئيس** (parent function). فمثلًا، الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات الخطّية هو $f(x) = x$ والذي يُسمّى الاقتران المحايد، من أمثلة اقترانات هذه العائلة الاقترانات الآتية:

$$f(x) = x + 3 , \qquad g(x) = 5x , \qquad j(x) = -7x + 1$$

وفي ما يأتي بعض الاقترانات الرئيسة الأكثر شيوعًا:

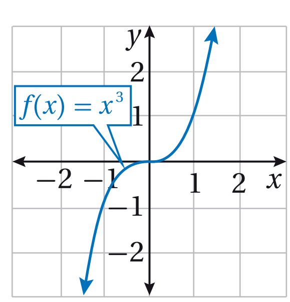
الاقتران التربيعي الرئيس

$f(x) = x^2$



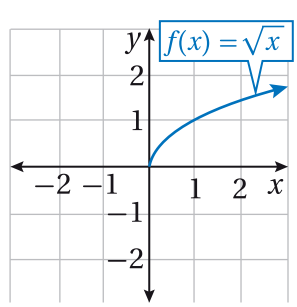
الاقتران التكعيبي الرئيس

$f(x) = x^3$



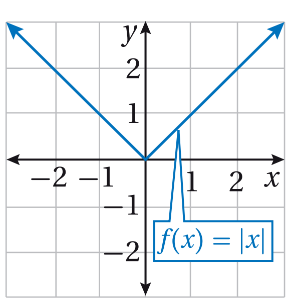
اقتران الجذر التربيعي الرئيس

$f(x) = \sqrt{x}$



اقتران القيمة المطلقة الرئيس

$f(x) = |x|$



يساعد معرفة شكل منحنى الاقتران الرئيس على تحليل وتمثيل منحنيات اقترانات أكثر تعقيدًا ناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس، فبعض هذه التحويلات يُغيّر موقع المنحنى فقط ولا يُغيّر في شكله وأبعاده، مثل تحويلات الانعكاس والانسحاب. وبعضها يُغيّر شكل المنحنى بحيث يبدو أوسع من منحنى الاقتران الرئيس أو أضيق منه، مثل تحويلات التمدد.

الانسحاب الرأسي

الانسحاب الرأسي (vertical shift) هو تحويل هندسي ينقل منحنى الاقتران إلى الأعلى عند إضافة ثابت موجب إلى الاقتران، وإلى الأسفل عند طرح ثابت موجب من الاقتران.

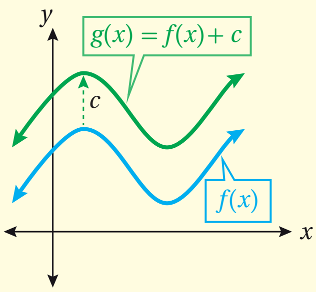
أتعلّم

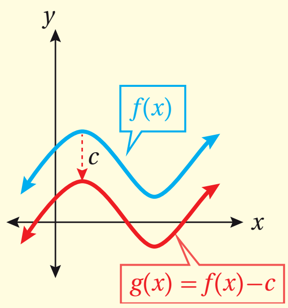
في الانسحاب الرأسي، يزيد الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى $g(x) = f(x) + c,\ c > 0$ بمقدار c وحدة على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$، وبالمثل فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى $g(x)=f(x)-c,\ c > 0$ يقلّ بمقدار c وحدة عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$

مفهوم أساسي — **الانسحاب الرأسي**

إذا كان f اقترانًا وكان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

- منحنى $g(x) = f(x) + c$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى الأعلى c وحدة.
- منحنى $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى الأسفل c وحدة.



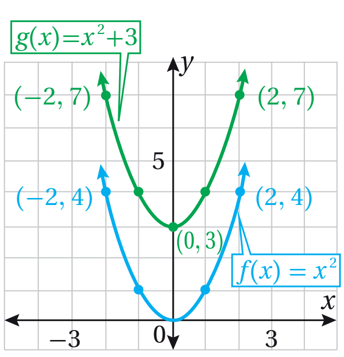


مثال 1

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

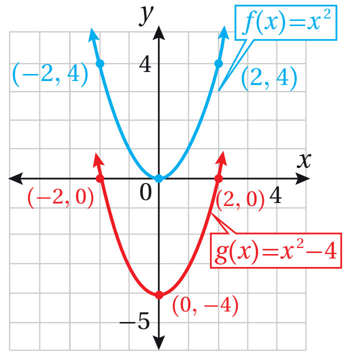
1 $g(x) = x^2 + 3$

منحنى $g(x) = x^2 + 3$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 3 وحدات إلى الأعلى؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g يزيد بمقدار 3 وحدات على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



2 $g(x) = x^2 - 4$

منحنــى $g(x) = x^2 - 4$ هو منحنــى $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى الأسفل؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g يقلّ بمقدار 4 وحدات عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = |x|$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 2$

b) $g(x) = |x| - 5$

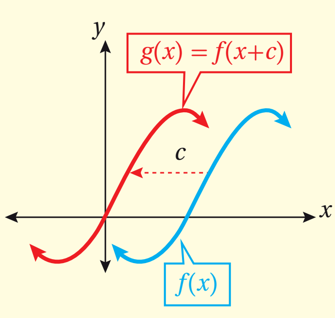
الانسحاب الأُفقي

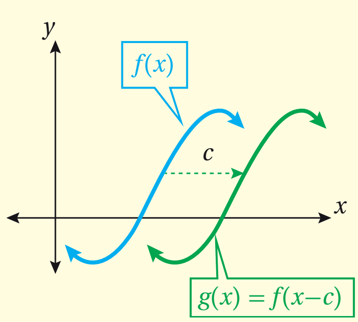
الانسحاب الأُفقي (horizontal shift) تحويل هندسي ينقل منحنى الاقتران إلى اليسار عند إضافة ثابت موجب إلى قِيَم x جميعها في مجال الاقتران، وإلى اليمين عند طرح ثابت موجب من قِيَم x جميعها في مجال الاقتران.

مفهوم أساسي — **الانسحاب الأُفقي**

إذا كان f اقترانًا وكان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

- منحنى $g(x) = f(x + c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى اليسار c وحدة.
- منحنى $g(x) = f(x - c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا إلى اليمين c وحدة.





أتعلّم

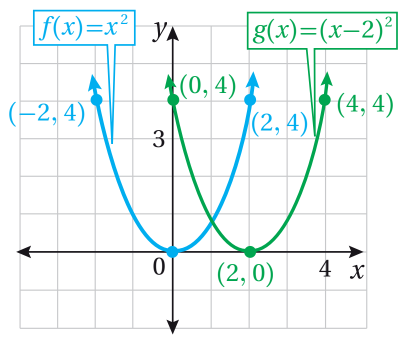
قيمة $f(x-c)$ عند x مساوية لقيمة $f(x)$ عند $x - c$ في الانسحاب الأُفقي.

مثال 2

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

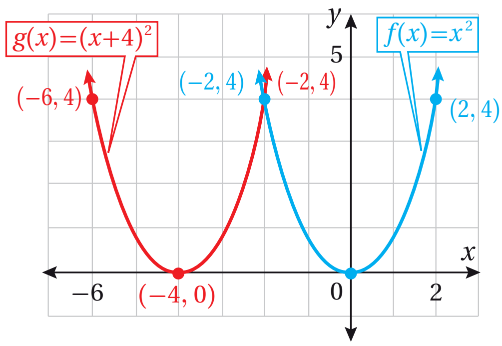
1 $g(x) = (x-2)^2$

منحنى $g(x) = (x-2)^2$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى g يزيد بمقدار وحدتين علـى الإحداثـي x للنقطة المقابلـة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



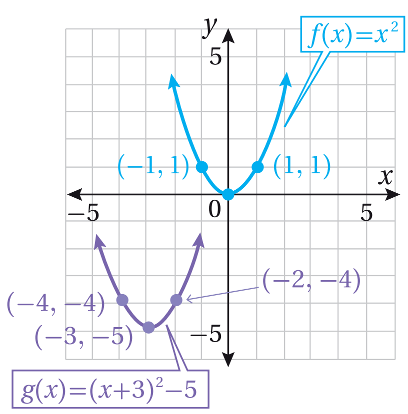
2 $g(x) = (x+4)^2$

منحنـى $g(x) = (x+4)^2$ هـو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى اليسار؛ لـذا، فـإنّ الإحداثي x لـكلّ نقطة على منحنـى g يقـلّ بمقـدار 4 وحدات عن الإحداثـي x للنقطـة المقابلـة لها على منحنى f، كما في الشكل المجاور.



3 $g(x) = (x+3)^2 - 5$

منحنـى $g(x) = (x+3)^2 - 5$ هــو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًـا 3 وحدات إلى اليسـار، و5 وحدات إلى الأسـفل، كما في الشـكل المجاور.



أتعلّم

في الفرع 3 من المثال 2، يُمكن البدء بإزاحة الاقتران f بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل ثمّ 3 وحدات إلى اليسار.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = (x-1)^3$ b) $g(x) = (x+1)^3$ c) $g(x) = (x+2)^3 - 4$

الانعكاس

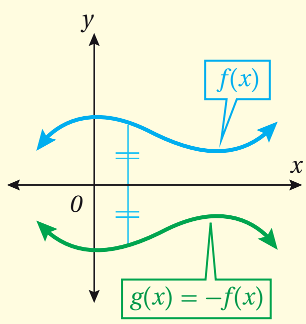
الانعكاس (reflection) هو تحويل هندسي يعكس منحنى الاقتران حول مستقيم محدّد.

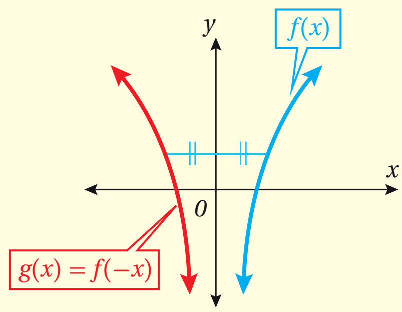
أتعلّم

عند إجراء تحويل الانعكاس يكون الإحداثي y لكل نقطة على منحنى $g(x) = -f(x)$ هو معكوس الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$، ومن جهة أخرى تكون قيمة $g(x) = f(-x)$ عند x مساوية لقيمة $f(x)$ عند $-x$

مفهوم أساسي — الانعكاس

- منحنى $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x.
- منحنى $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.



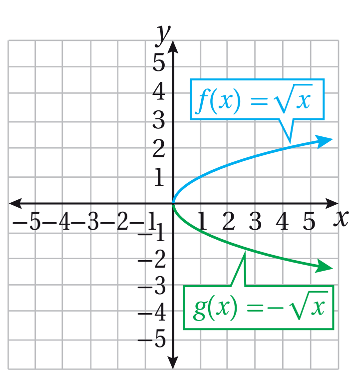


مثال 3

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

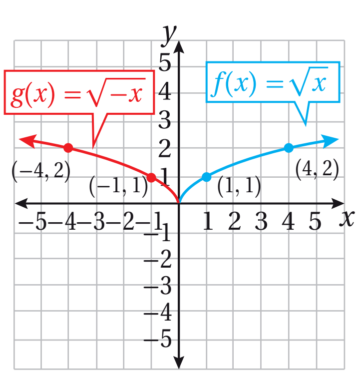
1 $g(x) = -\sqrt{x}$

منحنى $g(x) = -\sqrt{x}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x؛ لذا، فإنّ كلّ نقطة (x, y) على منحنى f تقابل النقطة $(x, -y)$ على منحنى g.



2 $g(x) = \sqrt{-x}$

منحنى $g(x) = \sqrt{-x}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور y؛ لذا، فإنّ كلّ نقطة (x, y) على منحنى f تقابل النقطة $(-x, y)$ على منحنى g.



أتعلّم

مجال الاقتران $g(x) = \sqrt{-x}$ هو الفترة $(-\infty, 0]$.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = -|x|$

b) $g(x) = |-x|$

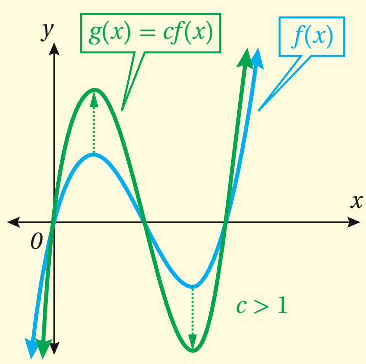
التمدّد الرأسي

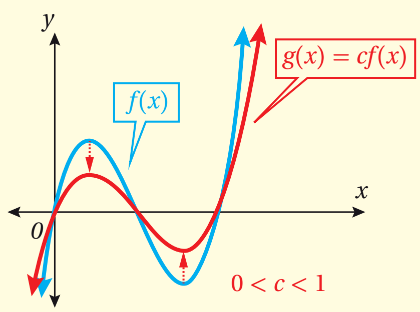
التمدّد الرأسي (vertical dilations) هو تحويل هندسي يؤدّي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضييقه رأسيًّا.

مفهوم أساسي: التمدّد الرأسي

إذا كان c عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنّ منحنى $g(x) = cf(x)$ هو:

- توسيع رأسي بمعامل مقداره c لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $c > 1$
- تضييق رأسي بمعامل مقداره c لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < c < 1$





أتعلّم

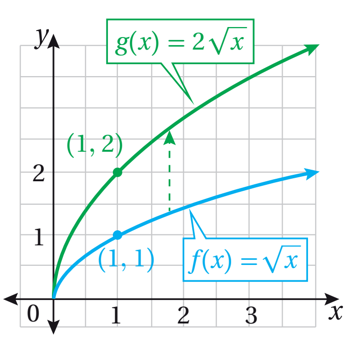
الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران $g(x) = cf(x)$، ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في c.

مثال 4

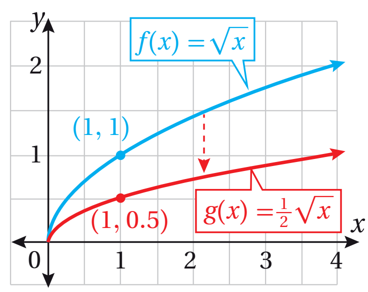
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $g(x) = 2\sqrt{x}$

منحنى $g(x) = 2\sqrt{x}$ هو توسيع رأسي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره 2؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في 2



2 $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



منحنى $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؛ لذا، فإنّ الإحداثي y لكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها في $f(x)$ في $\frac{1}{2}$.

أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

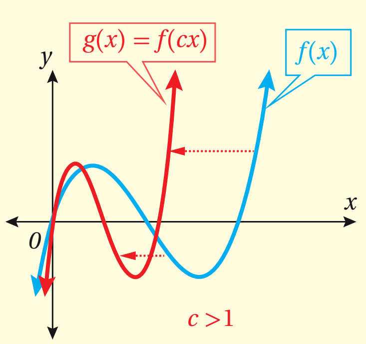
التمدّد الأُفقي

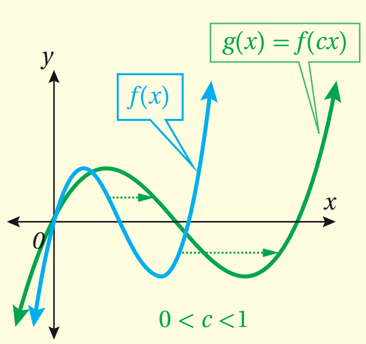
التمدّد الأفقي (horizontal dilations) هو تحويل هندسي يؤدّي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضييقه أفقيًّا.

مفهوم أساسي **التمدّد الأُفقي**

إذا كان c عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ منحنى $g(x) = f(cx)$ هو:

- تضييق أُفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $c > 1$ بمعامل مقداره $\frac{1}{c}$.
- توسيع أُفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < c < 1$ بمعامل مقداره $\frac{1}{c}$.





أتعلّم

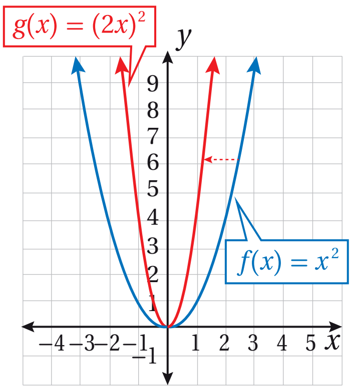
الإحداثي x لكلّ نقطة على منحنى $g(x) = f(cx)$، ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{c}$.

مثال 5

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

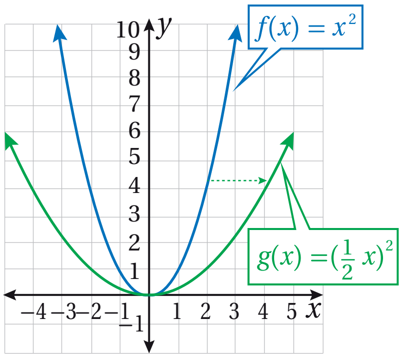
1 $g(x) = (2x)^2$

منحنى $g(x) = (2x)^2$ هــو تضييق أُفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لــكلّ نقطة علــى منحنى g ناتــج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{2}$.



2 $g(x) = (\frac{1}{2}x)^2$

منحنــى $g(x) = (\frac{1}{2}x)^2$ هــو توســيع أُفقــي لمنحنــى $f(x) = x^2$ بمعامل مقــداره 2؛ لذا، فإنّ الإحداثي x لــكلّ نقطة على منحنى g ناتج عن ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى $f(x)$ في 2



أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = (3x)^2$

b) $g(x) = (\frac{1}{3}x)^2$

سلسلة التحويلات الهندسية

يُمكــن تمثيل منحنى اقتــران ناتج عن تطبيق أكثر من تحويل هندســي على الاقتران الرئيس؛ بتطبيق التحويلات على الاقتران الرئيس بالترتيب الآتي:

1 الانعكاس ← 2 التمدّد ← 3 الانسحاب

مثال 6

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x)=\sqrt{x}$، لتمثيل منحنى $g(x)=\sqrt{1-x}+2$ بيانيًّا.

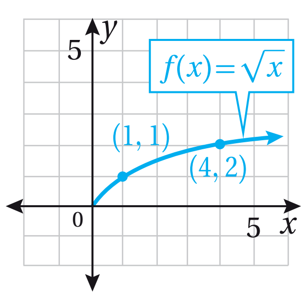
بما أنّ الانسحاب الأُفقي إلى اليمين يُكتب على صورة $x-c$، أبدأ بإعادة كتابة الاقتران g على الصورة الآتية:

$$g(x)=\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$$

يُمكنني الآن تمثيل منحنى الاقتران باتّباع الخطوات الآتية:

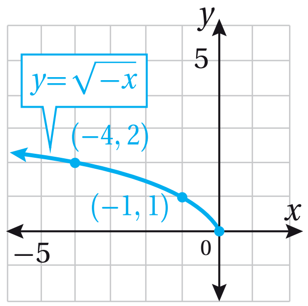
الخطوة 1:

أُمثّل منحنى $f(x)=\sqrt{x}$



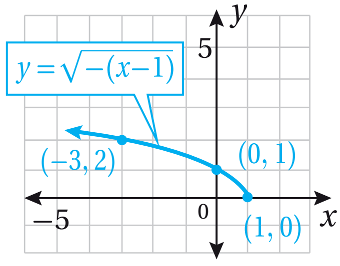
الخطوة 2:

أُمثّل منحنـــى $y=\sqrt{-x}$ بإجـراء انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.



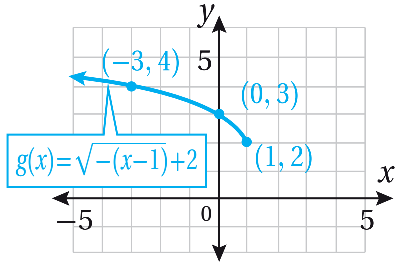
الخطوة 3:

أُمثّـل منحنـــى $y=\sqrt{-(x-1)}$ بإجراء انســحاب لمنحنـــى $y=\sqrt{-x}$ وحــدة واحدة إلى اليمين.



الخطوة 4:

أمثل منحنـــى $y=\sqrt{-(x-1)}+2$ بإجراء انسحاب لمنحنى $y=\sqrt{-(x-1)}$ وحدتان إلى الأعلى.



أتحقّق من فهمي

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x)=x^2$ لتمثيل منحنى $g(x)=-(x-2)^2+3$ بيانيًّا.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أستعملُ $f(x) = x^2$ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1) $g(x) = x^2 - 6$

2) $h(x) = (x-1)^2 + 1$

3) $q(x) = -(x-1)^2$

4) $r(x) = 2(x-2)^2$

5) $s(x) = 3x^2 + 4$

6) $p(x) = 2(\frac{1}{2}x)^2$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

7) $g(x) = \sqrt{x-3}$

8) $r(x) = \sqrt{x+4}$

9) $h(x) = \sqrt{x-2} + 5$

10) $p(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+2}$

11) $s(x) = -\sqrt{2x}$

12) $q(x) = \sqrt{1-x}$

أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = |x|$، لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

13) $g(x) = |x| + 5$

14) $h(x) = |x+4| - 2$

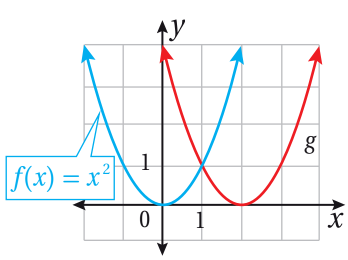
15) $q(x) = |x-3| - 2$

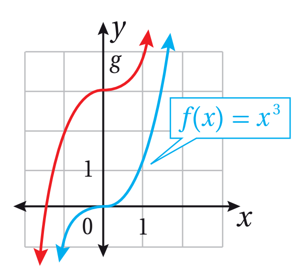
16) $r(x) = -2|x| + 1$

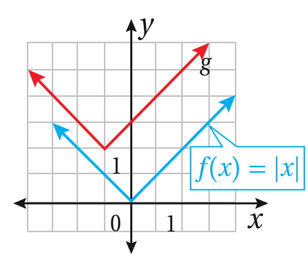
17) $s(x) = |\frac{1}{2}x + 1|$

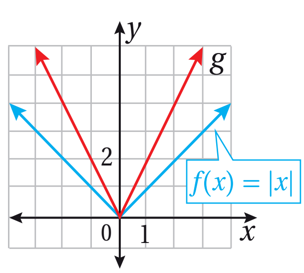
18) $p(x) = \frac{1}{4}|x|$

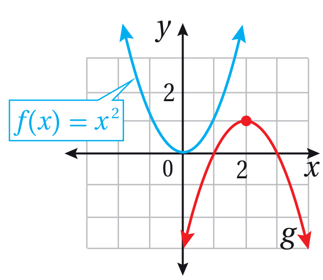
إذا كان منحنى الاقتران g ناتج عن تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقتران f؛ فأجد قاعدة الاقتران g في كلّ ممّا يأتي:

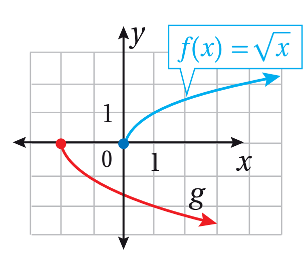
19) 

20) 

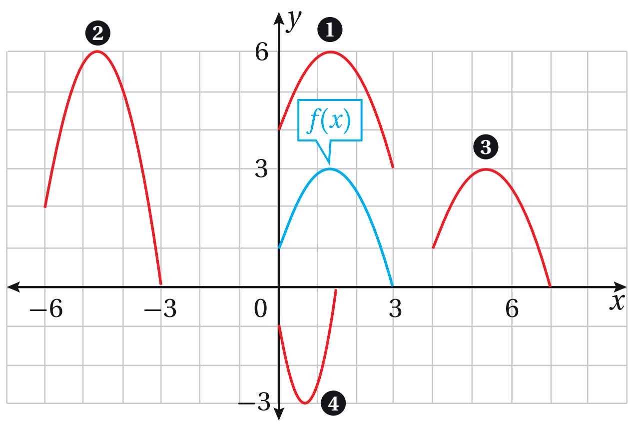
21) 

22) 

23) 

24) 

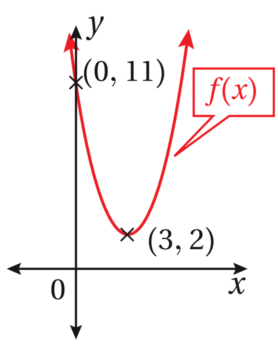
25 يُبيّن التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ (باللون الأزرق). أُحدّد رقم منحنى كلّ اقتران ممّا يأتي:



a) $g(x)=f(x-4)$　　b) $h(x)=f(x)+3$

c) $g(x)=2f(x+6)$　　d) $h(x)=-f(2x)$

يُبيّن التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران $f(x) = (x-3)^2 + 2$، الذي يقطع المحور y في النقطة $(0, 11)$، وله قيمة صغرى عند $(3, 2)$.

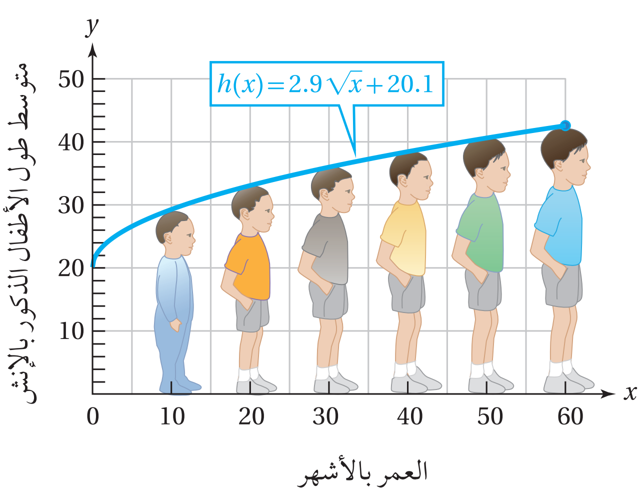


26 أُمثّل الاقترانين $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$ و $h(x) = f(2x)$ بيانيًّا.

27 أُحدّد القيمة الصغرى لكلّ من الاقترانين $g(x)$ و $h(x)$.

28 أجد نقطة تقاطع كلّ من الاقترانين g و h مع المحور y. ماذا ألاحظ ؟ أُبرّر إجابتي.

يُمثّل الاقتران $h(x) = 2.9\sqrt{x} + 20.1$ متوسّط طول الأطفال الذكور بالإنش، حيث x العمر بالأشهر.

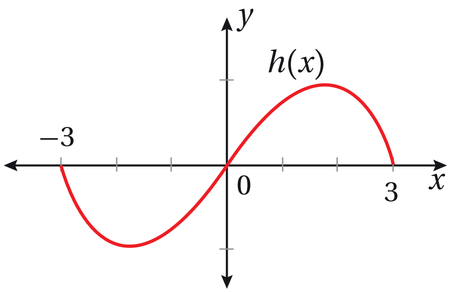


29 أصف التحويلات التي طُبِّقت على الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على $h(x)$.

30 أجد متوسّط طول الأطفال الذكور بعمر 5 سنوات، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.

31 ماذا يُمثّل الثابت 20.1 في الاقتران $h(x)$ بالنسبة إلى متوسّط أطوال الأطفال الذكور؟

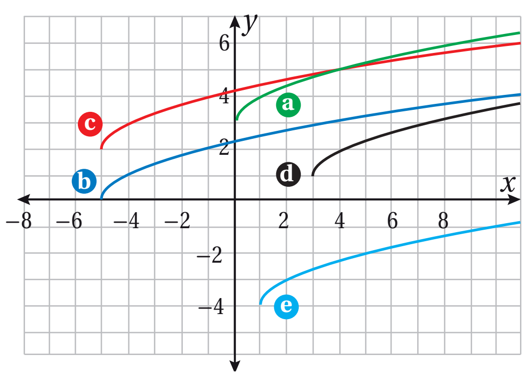
أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $h(x)$؛ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:



33 $f(x) = h(\frac{1}{3}x)$

32 $f(x) = h(3x)$

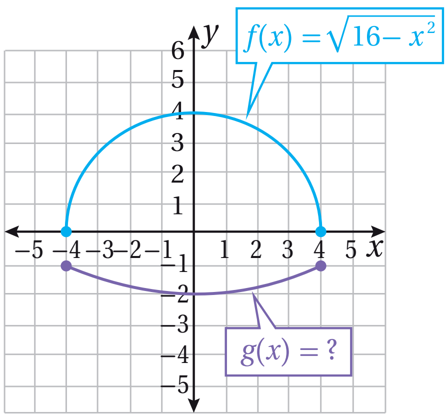
34 يُبيّن الشكل المجاور منحنيات مجموعة من الاقترانات الناتجة عن تحويلات هندسية لمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$. أكتبُ قاعدة الاقتران لكل منحنى.



35 أحلّ المسالة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

36 **تحدّ:** في الشكل المجاور إذا كان منحنى الاقتران g ناتج عن تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقتران f؛ فأجد قاعدة الاقتران g .



تبرير: أفترضُ أنّ (a, b) نقطة على منحنى الاقتران f. أُحدّد النقطة المقابلة لها على منحنى كلّ اقتران ممّا يأتي، مبرّرًا إجابتي:

39 $p(x) = f(3-x)$

38 $g(x) = 2f(x)$

37 $h(x) = f(-x)$

تبرير: أستعملُ منحنى الاقتران $f(x) = 2^{x+1}$، لتمثيل كلّ من الاقترانين الآتيين بيانيًّا، مبرّرًا إجابتي:

41 $h(x) = 2f(x)$

40 $g(x) = f(2x)$

الدرس 4

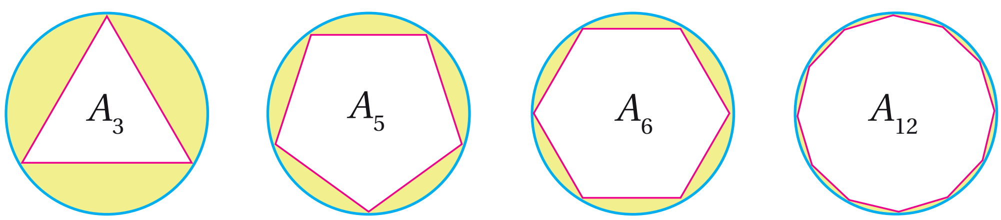
النهايات والاتّصال
Limits and Continuity

فكرة الدرس

- إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا وعدديًّا وجبريًّا.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

المصطلحات النهاية، الصيغة غير المحدّدة.

مسألة اليوم بالنظر إلى الأشكال أدناه، كم تصبح مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمضلع المنتظم (A_n)، عندما تزداد قيمة n بشكل كبير جدًّا؟



إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا

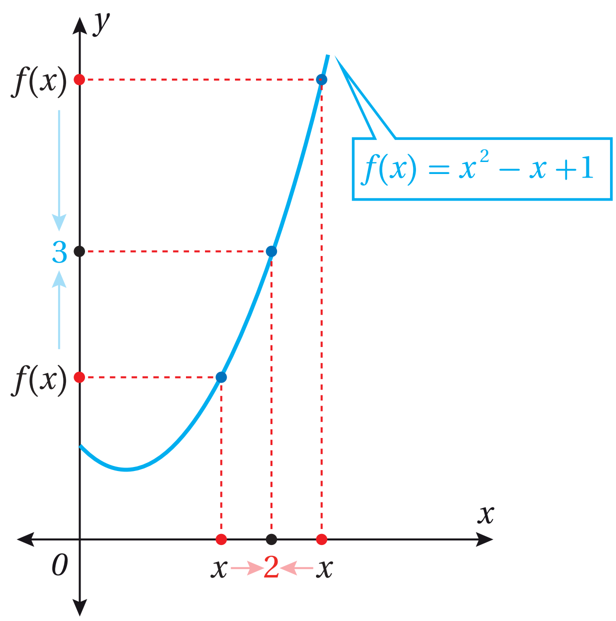
تعلّمتُ سابقًا الكثير من خواصّ الاقترانات، مثل المجال والمدى والتزايد والتناقص، وذلك عن طريق تحليل تمثيلاتها البيانية أو دراسة جدول قِيَم يُمثّل الاقتران، وسأتعلّم في هذا الدرس تحليل سلوك اقتران معطى، وتحديد إذا كانت قِيَم الاقتران (المخرجات) تقترب أكثر فأكثر من عدد ما، عندما تقترب قيم x (المدخلات) أكثر فأكثر من عدد محدّد مثل (c)، عندها يُسمّى العدد الذي تقترب منه قيم الاقتران **النهاية** (limit).

إذا كان $f(x) = x^2 - x + 1$ وأخترت قِيَمًا للمتغيّر x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، عندها يُمكنني الملاحظة من جدول القِيَم والتمثيل البياني الآتي لمنحنى $f(x)$، أنه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليسار؛ فإنّ قِيَم $f(x)$ تقترب من العدد (3)، وكلّما اقتربت قِيَم x من العدد (2) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم الاقتران تقترب من العدد (3)، عندها يُمكنني القول إنّ: نهاية (x^2-x+1) عندما تقترب x من العدد 2 من جهتَي اليمين واليسار هي 3، وتُكتب على الصورة:

$$\lim_{x\to 2} (x^2 - x + 1) = 3$$

أتعلّم

تعلّمتُ سابقًا أنّ السرعة اللحظية هي السرعة التي يُمكن إيجادها بتقليص الفترة الزمنية للسرعة المتوسّطة حتى تصبح نقطة (لحظة)؛ ما يعني أنّ السرعة اللحظية هي نهاية السرعة المتوسّطة.



جهة اليمين ← 2 → جهة اليسار

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.00001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

3

جهة اليسار ... جهة اليمين

النهاية عند نقطة

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كانت قيمة الاقتران $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c؛ فإنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

وتُقرأ: نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

لغة الرياضيات

تُقرأ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ أيضًا على الصورة: يقترب $f(x)$ من L عندما تقترب x من c.

عند كتابة $\lim\limits_{x \to c} f(x)$، فهذا يُشير إلى أنّ x تقترب من c من جهتَي اليمين واليسار، وإذا أردنا تحديد الجهة التي تقترب منها قِيَم x من القيمة c، فإنّنا نستعمل التعبيرين الآتيين:

- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليسار، حيث $x < c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار.
- أستعملُ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ للدلالة على النهاية من جهة اليمين، حيث $x > c$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين.

وتكون نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة؛ إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

مفهوم أساسي

بالكلمات: تكـون النهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

بالرموز: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$

مثال 1

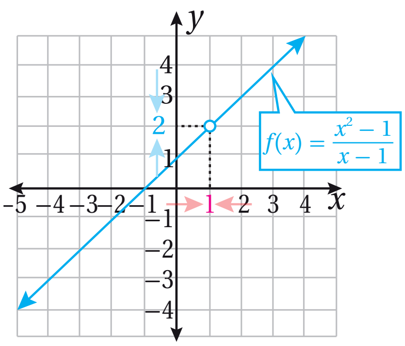
1 إذا كان $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$؛ فأجد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ بيانيًّا وعدديًّا.

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.

إنّ مجال الاقتران $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ما عدا 1 أو $(R-\{1\})$، وبما أنّ:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

لذا، فـإنّ التمثيل البياني لـ $f(x)$ هو نفسه التمثيل البياني للمستقيم $y = x+1$ مع دائرة صغيرة مفرغة عند $x = 1$ كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ من التمثيل البياني لـ $f(x)$ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من الجهتين؛ فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (2) من الجهتين، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها.

1

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

2

جهة اليسار — جهة اليمين

أُفكّر

لماذا مجال $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 1؟

إرشاد

أُلاحظ أنّ الاقتران $f(x)$ غير معرّف عند $x = 1$، إلّا أنّ النهاية موجودة عندما $x\to 1$

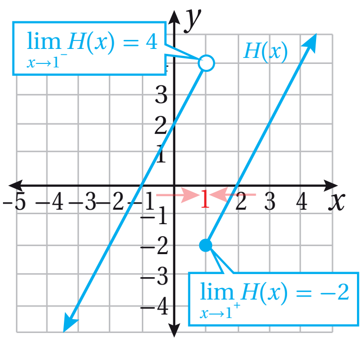
أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من الجهتين؛ فإنّ قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

أُلاحظ ممّا سبق، أنّ قيمة النهاية متساوية من الطريقتين.

2 إذا كان $H(x) = \begin{cases} 2x + 2 & , x < 1 \\ 2x - 4 & , x \geq 1 \end{cases}$، فأجد $\lim_{x \to 1} H(x)$

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.



إنّ الاقتران $H(x)$ متشعّب، وتمثيله البياني كما يظهر في الشكل المجاور. أُلاحظ من التمثيل البياني أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) = 4$$

ولكن، كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (−2)، وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) = -2$$

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim_{x \to 1} H(x)$ غير موجودة.

إرشاد

أُلاحظ أنّ $H(1) = -2$، ما يعني أنّ الاقتران معرّف عند $x = 1$، ولكن النهاية عندما تقترب x من العدد (1) غير موجودة.

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا.

أُنشئ جدول قِيَم باختيار قِيَم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم $f(x)$ المقابلة لها.

$\rightarrow 1 \leftarrow$

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		−1.998	−1.98	−1.8

جهة اليسار $\rightarrow$ 4   −2 $\leftarrow$ جهة اليمين

أُلاحظ أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليسار؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وأنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (1) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم $H(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد (−2)، وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim_{x \to 1} H(x)$ غير موجودة.

أُفكّر

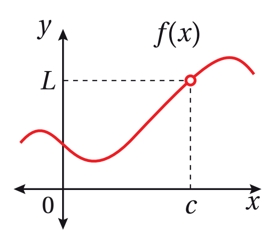
أجد $\lim_{x \to -3} H(x)$

أتحقّق من فهمي أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

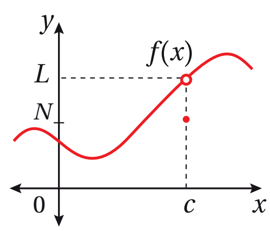
b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$

أُلاحظ من المثال السابق، أنّ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c لا علاقة لها بقيمة $f(c)$، فمثلًا $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ في الحالات الثلاث الآتية:



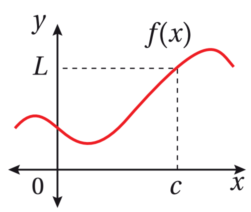
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرّفة



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c) = N$

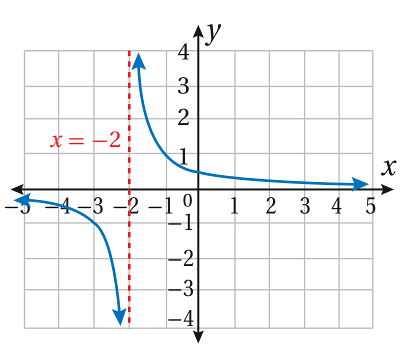


$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

$f(c) = L$

نهايات تتضمن (المالانهاية)

فـي بعض الأحيـان، تكون النهاية مـن اليمين أو اليسـار (أو كليهمـا) غير موجودة عنـد قيمة ما؛ لأنّ الاقتـران يزداد أو ينقص بشـكل غير محدود قرب تلك القيمة. وفي هذه الحالة، نصف سـلوك الاقتران بأنّه يقترب من (المالانهاية) الموجبة (∞) أو السـالبة ($-\infty$). الرمزان ∞، $-\infty$ ليسا عددين حقيقيّين، ولكنّهما يصفان سلوك الاقترانات عند خط التقارب الرأسي.



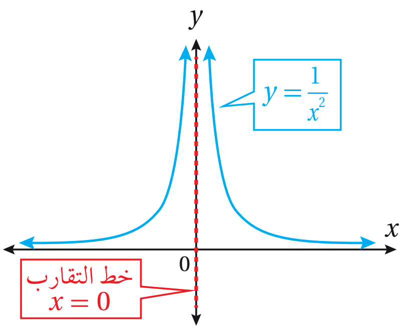
أتعلّم

الرمزان ∞، $-\infty$ ليسـا عددين حقيقيّين؛ لذا، لا تنطبـق عليهمـا القواعد الجبريـة مثـل الجمـع والطـرح والمقارنـة، فمثـلًا $\infty \neq \infty$ لأنّ (المالانهاية) لا تقف عند قيمة ما.

مثال 2

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$



أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{1}{x^2}$، أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليسار؛ فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها **تزداد بشكل غير محدود،** وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليسار غير موجودة. أُلاحظ كذلك أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليمين؛ فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها **تزداد بشكل غير محدود،** وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليمين غير موجودة.

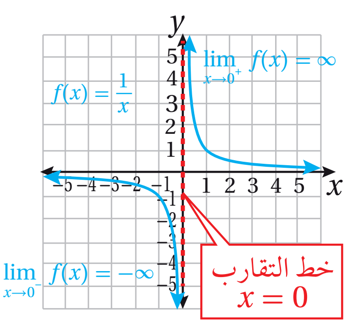
على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهتَي اليمين واليسار غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

وبما أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من الجهتين؛ فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها **تزداد بشكل غير محدود،** ويُمكن أيضًا أن نصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$



أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$، أنّه كلّما اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليسار؛ فإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها **تقلّ بشكل غير محدود،** وهذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x من العدد (0) من جهة اليسار غير موجودة. على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من الصفر من جهة اليسار غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

أتذكّر

تعلّمتُ سابقًا أنّ الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ من أبسط الاقترانات النسبية، ويُسمّى اقتران المقلوب.

ألاحظ كذلك أنّه كلّمـــا اقتربت قِيَم x من العدد (0) من جهة اليمين؛ فـإنّ قِيَم $f(x)$ المقابلة لها **تزداد بشـــكل غير محدود**، وهـــذا يعني أنّ النهاية عندما تقترب x مـــن العدد (0) من جهة اليميـــن غير موجودة. على الرغم من أنّ النهاية عندما تقترب x من الصفر من جهة اليمين غير موجودة، إلّا أنّه يُمكن وصف سلوك الاقتران بكتابة:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

وبما أنّ النهاية من جهتَي اليمين واليسار غير موجودة، إذن: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة.

أفكّر

لماذا لم نســتطع وصف سلوك الاقتران باستعمال النهايـة في الفــرع 2 من المثــال 2، كما جــرى وصفه في الفرع 1؟

أتحقّق من فهمي

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^2}$

إيجاد النهايات جبريًّا

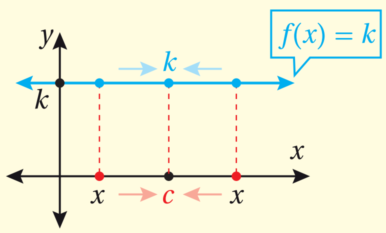
تعلّمتُ في الأمثلة الســابقة كيفية إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا، وســأتعلّم الآن طرائق جبرية لإيجاد النهايات.

مفهوم أساسي — **نهايات الاقترانات**

نهاية الاقتران الثابت

بالكلمات: نهايــة الاقتــران الثابــت عند أيّ نقطــة c هي القيمــة الثابتة للاقتران.

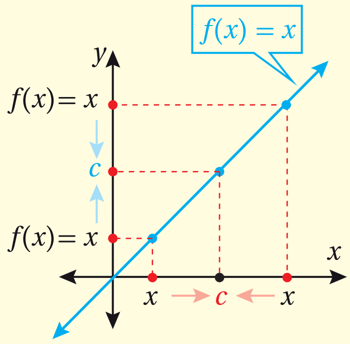
بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهاية الاقتران المحايد

بالكلمات: نهايــة الاقتــران $f(x) = x$ عند النقطة c هي c.

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} x = c$



وتُعدّ الخصائص الآتية أدوات أساسية لإيجاد النهايات جبريًّا:

مفهوم أساسي — **خصائص النهايات**

إذا كان k, c عددين حقيقيّين، و n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x\to c} f(x), \lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودتين؛ فإنّ كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصّية المجموع: $1)\ \lim\limits_{x\to c} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$

خاصّية الفرق: $2)\ \lim\limits_{x\to c} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$

خاصّية الضرب في ثابت: $3)\ \lim\limits_{x\to c} (k\,f(x)) = k \lim\limits_{x\to c} f(x)$

خاصّية الضرب: $4)\ \lim\limits_{x\to c} (f(x)\times g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \times \lim\limits_{x\to c} g(x)$

خاصّية القسمة: $5)\ \lim\limits_{x\to c} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)},\ \lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصّية القوّة: $6)\ \lim\limits_{x\to c} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to c} f(x))^n$

خاصّية الجذر النوني: $7)\ \lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$

إذا كان n عددًا زوجيًّا؛ فأتحقّق من أنَّ $\lim\limits_{x\to c} f(x) \geq 0$

مثال 3

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 6)$

خاصّيتا المجموع والفرق: $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x+6) = \lim\limits_{x\to -1} x^3 - \lim\limits_{x\to -1} 4x + \lim\limits_{x\to -1} 6$

خاصّيتا القوة والضرب في ثابت: $= (\lim\limits_{x\to -1} x)^3 - 4 \lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 6$

نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد: $= (-1)^3 - 4(-1) + 6$

بالتبسيط: $= 9$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$$ **2**

خاصّية الجذر النوني

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{x-1}}$$

خاصّية القسمة

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 5} x^2}{\lim_{x \to 5} (x-1)}}$$

خاصّية القوّة والفرق

$$= \sqrt{\frac{(\lim_{x \to 5} x)^2}{\lim_{x \to 5} x - \lim_{x \to 5} 1}}$$

نهايتا الاقتران الثابت والاقتران المحايد

$$= \sqrt{\frac{(5)^2}{5-1}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{5}{2}$$

أتحقّق من فهمي

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim_{x \to 1} (2x^3 + 3x^2 - 4)$

b) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}$

أتذكّر

في الفرع 2 من المثال، يجب التحقّق أنّ $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ لأنّ دليل الجذر عدد زوجي.

في المثال السابق، أُلاحظ أنّ نهاية كلّ اقتران عندما تقترب x من c تساوي $f(c)$؛ لذا، يُمكن الاستنتاج بأنّه يُمكن إيجاد هذه النهايات **بالتعويض المباشر**، ولكن هذا لا ينطبق على الاقترانات جميعها، إلّا أنّه ينطبق على كثيرات الحدود والاقترانات النسبية.

مفهوم أساسي — النهايات بالتعويض المباشر

نهايات كثيرات الحدود

إذا كان $f(x)$ كثير حدود، وكان c عددًا حقيقيًّا؛ فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

نهايات الاقترانات النسبية

إذا كان $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ اقترانًا نسبيًّا، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = \frac{p(c)}{q(c)}, \ q(c) \neq 0$$

تنبيه

يُمكن إيجاد نهاية الاقتران النسبي بالتعويض المباشر؛ طالما أنّ قيمة مقام الاقتران النسبي عند c لا تساوي صفرًا.

مثال 4

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

1) $\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$

بما أنّها نهاية كثير حدود، إذن: يُمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) = (2)^4 - 5(2)^3 + (2)^2 - 7$$ بالتعويض المباشر

$$= -27$$ بالتبسيط

2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

بما أنّ $x = -1$ تقع في مجال الاقتران النسبي (ليست صفر مقام)، إذن: يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2}$$ بالتعويض المباشر

$$= -\frac{4}{3}$$ بالتبسيط

3) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

بما أنّ $x = -3$ لا تقع في مجال الاقتران النسبي (المقام يساوي صفرًا عندها)،
إذن: لا يُمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

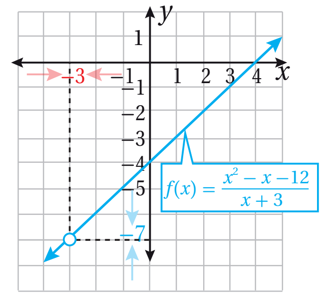
a) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim_{x \to -1} \sqrt{1 + 4x^2}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x - 6}{x^2 - 2}$

d) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

إنّ ناتج التعويض المباشـر في الفرع 4 من المثال السـابق ($\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3}$) يُعطي الناتج $\frac{0}{0}$ ، وتُسـمّى هذه النتيجة **الصيغة غير المحـددة** (indeterminate form)، ولكنّ هذا لا يعني أنّ النهاية غير موجودة، فالتمثيل البياني المجاور للاقتران $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x+3}$ يُظهر أنّ النهاية موجودة عند $x = -3$ وتساوي -7



$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -7$

نحتاج في مثل الحالة (ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$) إلى البحث عن صيغة مكافئة للاقتران، عن طريق تبسـيطه جبريًّا؛ وذلك بتحليل كلّ من البسـط والمقام واختصار العوامل المشتركة، أو إنطاق البسط أو المقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 5

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

1 $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ ؛ لذا، أُحلّل المقدار جبريًّا وأختصرُ العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)(x+3)}{x+3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x\to -3} (x-4)$$ بالتبسيط

$$= -3 - 4 = -7$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ ؛ لذا، أُنطِقُ البسط أولًا، ثمّ أختصرُ العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1}$$ أضرب كلًّا من البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x+1} + 1)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + 1)}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \frac{1}{2}$$ بالتعويض المباشر

أتعلّم

بشكل عام، إذا كان ناتج التعويض المباشر يساوي $\frac{0}{0}$ ؛ فإنّـه يجب تبسـيط المقاديـر جبريًّـا وذلك بإيجاد عوامل مشـتركة بيـن البسـط والمقـام واختصارها.

3 $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$؛ لذا، أحتاج إلى إعادة تعريف القيمة المطلقة أولًا، ثمّ أختصرُ العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

الخطوة 1: أُعيد تعريف الاقتران.

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & , x > 2 \\ \dfrac{-(x-2)}{x-2} & , x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & , x > 2 \\ -1 & , x < 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد النهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

أُلاحظ أنّه توجد قاعدتان مختلفتان عن يمين العدد 2 وعن يساره؛ لذا، يجب إيجاد نهاية اليمين واليسار.

النهاية من جهة اليسار $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} (-1) = -1$

النهاية من جهة اليمين $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} (1) = 1$

وبما أنّ النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين؛ فإنّ $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ غير موجودة.

أتحقّق من فهمي

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{7x-x^2}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

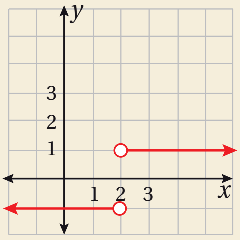
c) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$

أتذكّر

إعادة التعريف هي إعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة على صورة اقتران متشعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

إرشاد

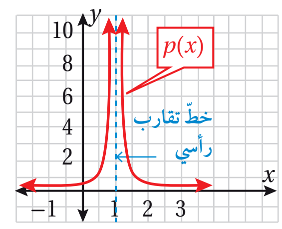
أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ أنّ النهاية غير موجودة.



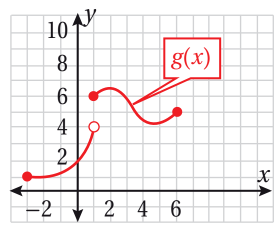
الاتّصال

يكون **الاقتران متّصلًا** (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أيّ انقطاع أو قفزة أو فجوة. ويكون الاقتران متّصلًا عند نقطة إذا كان منحناه يمرّ عبر هذه النقطة دون انقطاع.

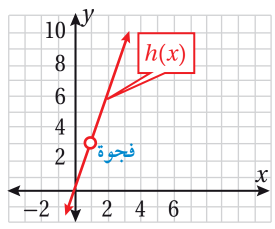
توضّح التمثيلات البيانية الآتية الحالات المختلفة للاتّصال:



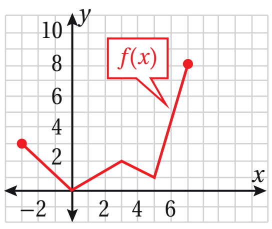
غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



غير متّصل عند $x = 1$



متّصل عند $x = 1$

أُلاحظ أنّ منحنيي الاقترانين $p(x)$ و $h(x)$ أعلاه غير متّصلين عند $x = 1$ لأنّ كلًّا من الاقترانين غير معرّف عند $x = 1$ (على الرغم من أنّ نهاية الاقتران $h(x)$ موجودة عندما $x = 1$). أمّا الاقتران $g(x)$ فإنّه غير متّصل عند $x = 1$ بسبب وجود قفزة (ما يعني أنّ النهاية غير موجودة).

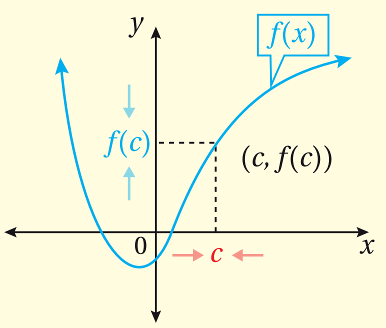
ممّا سبق، يُمكن التوصّل إلى أنّ الاقتران يكون متّصلًا عند نقطة؛ إذا كانت النهاية تساوي صورة الاقتران عند تلك النقطة.

مفهوم أساسي

الاتّصال عند نقطة

يكون الاقتران $f(x)$ متّصلًا عند النقطة $x = c$ إذا حقّق الشروط الآتية جميعها:

- $f(c)$ معرفة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$



أتذكّر

النهاية موجودة تعني أنّ نهايتي اليمين واليسار متساويتان، ووجود النهاية عند نقطة لا يعني بالضرورة أنّ الاقتران معرّف عند تلك النقطة.

مثال 6

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، مبرّرًا إجابتي:

1 $f(x) = x^3 - x\,,\; x = 3$

الاقتران f متّصل عند $x = 3$ لأنّ $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 24$

2 $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}\,,\; x = 2$

الاقتران g غير متّصل عند $x = 2$ لأنه غير معرّف عند هذه النقطة (صفر مقام).

أتعلّم

- كثيرات الحدود متّصلة عند قِيَم x جميعها، التي تنتمي إلى مجالها.
- الاقترانات النسبية غير متّصلة عند أصفار المقام.

3 $h(x)=\begin{cases} x^2-3 & ,x\le -1 \\ x-1 & ,x>-1 \end{cases}$, $x=-1$

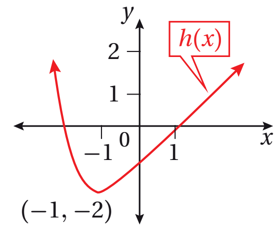
لتحديد إذا كان الاقتران h متّصلًا عند $x=-1$، يجب إثبات أنّ $\lim\limits_{x\to -1} h(x)=h(-1)$

- $h(-1)=(-1)^2-3=-2$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2-3)=-2$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=-2$، فإنّ $\lim\limits_{x\to -1} h(x)=-2$

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to -1} h(x)=h(-1)=-2$، إذن: $h(x)$ متّصل عند $x=-1$.

ويوضّح التمثيل البياني المجاور للاقتران h أنّه متّصل عند $x=-1$



4 $p(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & ,x\ne 4 \\ 7 & ,x=4 \end{cases}$, $x=4$

لتحديد إذا كان الاقتران p متّصلًا عند $x=4$، يجب إثبات أنّ $\lim\limits_{x\to 4} p(x)=p(4)$

- $p(4)=7$
- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{x+3}$ بتحليل الفرق بين مربّعين

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}$ باختصار العامل المشترك

$=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)$ بالتبسيط

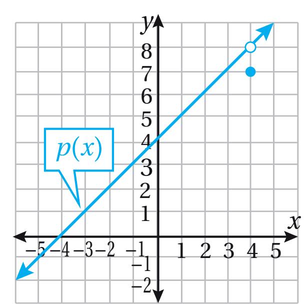
$=4+4=8$ بالتعويض المباشر والتبسيط

بما أنّ $\lim\limits_{x\to 4} p(x)\ne p(4)$، إذن: $p(x)$ غير متّصل عند $x=4$.

ويوضّح التمثيل البياني المجاور للاقتران $p(x)$ عدم اتّصاله عند $x=4$

أتذكّر

بما أنّ ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، أُحلّل المقدار جبريًّا وأختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.



أتحقّق من فهمي

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، مبرّرًا إجابتي:

a) $f(x)=x^5+2x^3-x$, $x=1$

b) $g(x)=\dfrac{x^2+16}{x-5}$, $x=5$

c) $h(x)=\begin{cases} x-1 & ,x<3 \\ 5-x & ,x\ge 3 \end{cases}$, $x=3$

d) $p(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & ,x\ne 5 \\ 10 & ,x=5 \end{cases}$, $x=5$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

1) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+1)$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3} (x+7)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} |x|$

5) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2-5)$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-2\right)$

7) $\lim\limits_{x\to -2} (4-x^2)$

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$

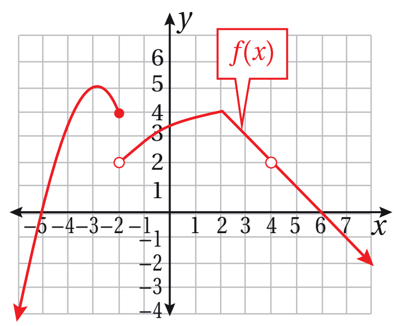
10) $\lim\limits_{x\to 3} f(x),\ f(x)=\begin{cases} -1 & ,x\neq 3 \\ 1 & ,x=3 \end{cases}$

11) $\lim\limits_{x\to 2} h(x),\ h(x)=\begin{cases} 2x & ,x<2 \\ x^2 & ,x\geq 2 \end{cases}$

12) $\lim\limits_{x\to -2} p(x),\ p(x)=\begin{cases} x+6 & ,x<-2 \\ -\dfrac{1}{2}x+1 & ,x>-2 \end{cases}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} g(x),\ g(x)=\begin{cases} x & ,x\leq 0 \\ \sqrt{x} & ,x>0 \end{cases}$

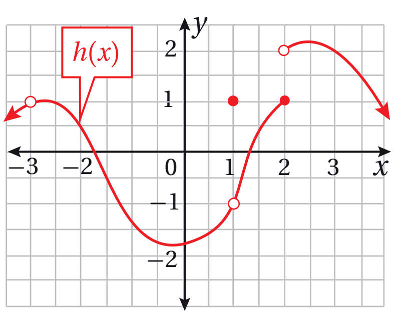
أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



14) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

15) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



16) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

17) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

18) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

19) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-4x+7)$

20) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

21) $\lim\limits_{x\to 9} \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

22) $\lim\limits_{x\to 2\pi} (x^3+\pi x-5\pi^3)$

23) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{\dfrac{x-3}{2x+4}}$

24) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2+11}$

25) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$

26) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}$

27) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$

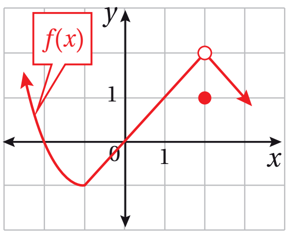
28) $\lim\limits_{x\to 3} f(x),\ f(x)=\begin{cases} x-1 & ,x<3 \\ 3x-7 & ,x>3 \end{cases}$

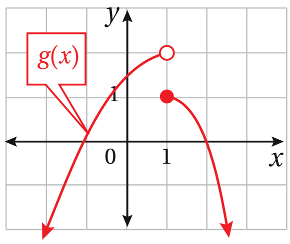
29) $\lim\limits_{t\to 4} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{1}{2}}{t-4}$

30) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

31 إذا كان $f(x)=ax^2+bx+c$، حيث $a\neq 0$، وكان $f(0)=0$، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$، $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=8$؛ فأجد قِيَم الثوابت a و b و c.

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:





32 $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

33 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$

34 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\times g(x))$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، مبرّرًا إجابتي:

35 $f(x)=\pi x^2+4.2x+7\ ,\ x=-5$

36 $g(x)=\dfrac{16}{x^2+25}\ ,\ x=-5$

37 $h(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<0 \\ 3 & ,x\geq 0\end{cases}\ ,\ x=0$

38 إذا كان $f(x)=\begin{cases} x+3 & ,x\neq 3 \\ 2+\sqrt{k} & ,x=3\end{cases}$، متّصلًا عند $x=3$؛ فأجد قيمة الثابت k.

معلومة

فرن القميـــن (Kiln): هو فرن على شـــكل حجـــرات معزولة توقـــد النار داخلها، ويُســـتعمل فـي عمليـــات التجفيف وبعض التجارب الكيميائية، واستُعمِل هذا النوع من الأفران منذ القِدَم لتحضير الفخـــار ولبنات البناء (الآجر).

أفـــران: يتحكّم فني مختبر فـــي درجة الحرارة T داخل فـــرن (القمين) لتزداد بمقدار $2°C$ لكل دقيقة بدءًا بالدرجة $0\ °C$ خلال الدقائق الستين الأولـــى، وبعد ذلك يبدأ بخفض درجة حرارة الفـــرن بمقدار $3°C$ لكلّ دقيقة. ويُمثّل الاقتران الآتي العلاقة بين درجة T والزمن t بالدقائق:

$$T(t)=\begin{cases} 2t\ , & t\leq 60 \\ k-3t\ , & t>60\end{cases}$$

39 أجد قيمة k التي تجعل الاقتران T متصلًا عند $t=60$

40 أُبيّن لماذا يجب أن يكون الاقتران T متصلًا عند $t=60$

مهارات التفكير العليا

41 **تحدّ:** أجد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$ بيانيًّا وجبريًّا.

42 **تبرير:** أجد قيمتَي الثابتين m و b اللتين تجعلان $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{mx+b}-3}{x}=1$، مبررًا إجابتي.

43 **تبرير:** أجد قيمة الثابت a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{a}{x^2-1}\right)$ موجودة.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 باقي قسمة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 9$ على $(x+2)$ يساوي:

a) 3 b) -1 c) 9 d) 27

2 إذا كان $(x-3)$ عاملًا من عوامل $g(x) = 2x^3 + x^2 + px - 6$، فما قيمة p؟

a) -17 b) -3 c) 10 d) -19

3 ما إحداثيّا صورة النقطة $A(-1, 3)$ الناتجة عن توسيع رأسي معامله 2، وانسحاب بمقدار وحدتين إلى اليسار؟

a) $A'(-2, 1)$ b) $A'(1, 6)$

c) $A'(-3, 6)$ d) $A'(-4, 2)$

4 إذا كان $\frac{5x-12}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$، فما قيمة $A + B$؟

a) -12 b) -7 c) 3 d) 5

5 ما التحويل الذي يجري على منحنى $f(x)$ للحصول على منحنى الاقتران $g(x) = 2f(x)$؟

a) تضييق أُفقي. b) توسيع رأسي.

c) انسحاب رأسي. d) انسحاب أُفقي.

أُحلّل كلًّا ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

6 $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$

7 $8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

8 $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

9 $x^3 + 16x^2 - 3x = 5x^2 - 18x + 27$

10 إذا كان باقي قسمة كلّ من المقدارين $mx^3 + x^2 - 10x - 6$، و $2x^3 - 4x^2 + mx + 8$ على $(x-2)$ متساويًا؛ فأجد قيمة الثابت m.

أُجزّئ كلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

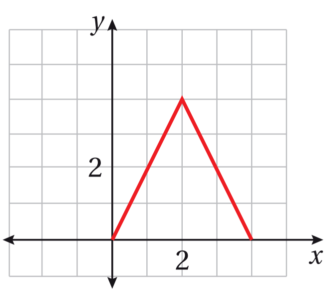
11 $\frac{6}{(x+3)(x+1)}$

12 $\frac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x}$

13 $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$

14 $\frac{4x^2-x-2}{x^4+2x^2}$

أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كلّ من الاقترانات الآتية:



15 $h(x) = f(x-2)$

16 $g(x) = -f(x) + 3$

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

17 $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

18 $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

19 $\lim_{x\to -4} \frac{|x-4|}{x-4}$

20 $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^4+x^2-6}{x^4+2x+3}\right)$

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، مبرّرًا إجابتي:

21 $f(x) = 3x - 2 \ , \ x = 5$

22 $g(x) = \frac{1}{x} \ , \ x = 0$

23 $h(x) = \begin{cases} 3x + 4 & , x < 3 \\ 2x - 1 & , x \geq 3 \end{cases} \ , \ x = 3$

24 يريد حدّاد أن يصنع خزّان ماء على هيئة متوازي مستطيلات، بحيث يزيد طولها 1 m على مثلَي عرضه، ويزيد ارتفاعها 1 m على عرضه، ويكون حجمه $30\ m^3$، فكم مترًا مربّعًا من الحديد يلزمه لصنعه؟

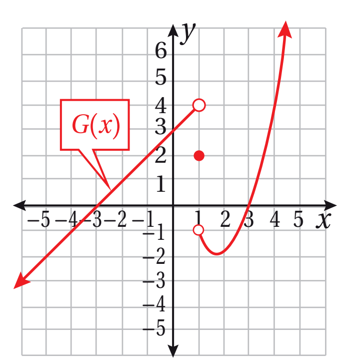
أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

25 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + 3\right)$

26 $\lim_{x \to 1} |x - 2|$

27 $\lim_{x \to 2} h(x), h(x) = \begin{cases} -x + 3 & , x < 2 \\ x + 1 & , x \geq 2 \end{cases}$

أستعملُ التمثيل البياني لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



28 $\lim_{x \to 1} G(x)$

29 $\lim_{x \to -2} G(x)$

30 $\lim_{x \to -3} G(x)$

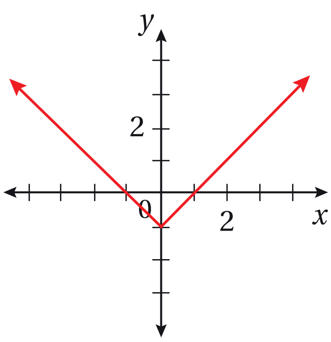
أستعملُ منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، لتمثيل كلّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

31 $g(x) = (x-3)^3 + 2$

32 $f(x) = \frac{1}{4} x^3$

تدريب على الاختبارات الدولية

33 أيّ الاقترانات الآتية يُمثّل قاعدة المنحنى المجاور؟



a) $g(x) = |x + 1|$

b) $g(x) = |x - 1|$

c) $g(x) = |x| - 1$

d) $g(x) = -|x|$

34 باقي قسمة $f(x) = x^3 - 4x + 5$ على $h(x) = x + 3$ يساوي:

a) -10 b) 20 c) 8 d) 26

35 أيّ الاقترانات الآتية ناتج عن انسحاب الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$ إلى الأعلى 4 وحدات وإلى اليمين 5 وحدات؟

a) $g(x) = (x + 5)^3 - 4$

b) $g(x) = (x - 5)^3 - 4$

c) $g(x) = (x + 5)^3 + 4$

d) $g(x) = (x - 5)^3 + 4$

الوحدة

3

الاشتقاق

Differentiation

ما أهمّية هذه الوحدة؟

يُستعمل الاشتقاق في الكثير من التطبيقات الحياتية. ومن ذلك؛ إيجاد معدّلات التغيّر بالنسبة إلى الزمن، مثل السرعة والتكاثر والتغيّر في درجات الحرارة، إضافة إلى أهمّيته في تحديد القيمة العظمى أو الصغرى، في الكثير من المواقف، مثل تحديد أعلى ربح وأقل تكلفة.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ إيجاد المشتقّة الأولى لكثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ✓ حلّ مسائل حياتية عن القِيَم العظمى والصغرى.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجاد مشتقّة اقترانات القوّة.
- ◄ استعمال قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقّة تركيب اقترانين.
- ◄ رسم منحنى كثيرات الحدود؛ باستعمال المشتقّة.
- ◄ حلّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (17 و 18) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

اشتقاق اقتران القوّة
Differentiating a Power Function

فكرة الدرس اشتقاق اقترانات القوّة.

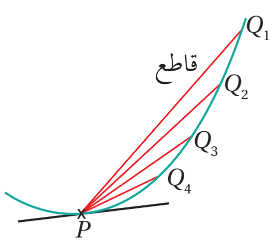
المصطلحات التعريف العام للمشتقّة، العمودي على المماس، اقتران القوة.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتـران $s(t) = 100 + 5t^2$ المسافة التي يقطعها قمر صناعي في أثناء سقوطه عائدًا إلى الأرض، بعد t ثانية من بدء حركته. أجد سرعة القمر الصناعي بعد 12 ثانية من سقوطه.

التعريف العام للمشتقة

تعلّمتُ سابقًا أنّ المشتقّة هي طريقة لإيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة، وذلك بإيجاد ميل المماس عند تلك النقطة.

يُبيّن الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى اقتران عند النقطة P. أُلاحظ أنّه في أثناء حركة النقطة Q_1 على منحنى الاقتران نحو النقطة P فإنّها تمر بالنقاط Q_2 وQ_3 و Q_4، وأُلاحظ كذلك أنّ ميل كلّ من القواطع $\overline{PQ_2}$ و $\overline{PQ_3}$ و $\overline{PQ_4}$ يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة P.



يُمكنني بالاعتماد على هذه الملاحظة، إيجاد مشتقّة اقتران قاعدته معلومة مثل $y = 3x^2$، فإذا علمتُ أنّ النقطة Q على منحنى الاقتران تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها h عن النقطة $P(x, 3x^2)$، فإنّ إحداثيَي النقطة Q هما: $(x + h, 3(x + h)^2)$

إذن: ميل القاطع $\overline{PQ}$ يساوي:

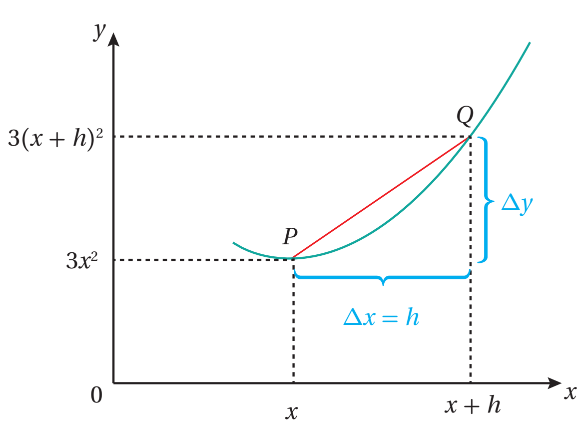
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h) - x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h}$$

$$= \frac{6hx + 3h^2}{h}$$

$$= 6x + 3h$$



أُفكّر

لماذا يجب علينا تجنّب أن تكون قيمة $h = 0$؟

وعندما تقترب Q من P؛ فإنّ h تصبح أصغر فأصغر، وعندها يُمكنني القول إنّ (h تقترب من الصفر) وتُكتب على الصورة $h \to 0$.

ومنه: يكون ميل المماس (m) عند النقطة P يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$

$$m = \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x$$

تُسمى $6x$ مشتقّة الاقتران $y = 3x^2$ ، ويُرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن: إذا كان $y = 3x^2$ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 6x$

تُسمّى هذه الطريقة في إيجاد مشتّقة اقتران عند أي نقطة **التعريف العام للمشتقّة** (the definition of the derivative).

رموز رياضية

يُرمز لمشتقّة $y = f(x)$ بالرموز

$f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y'$

مفهوم أساسي — **التعريف العام للمشتقّة**

مشتقّة الاقتران f بالنسبة إلى المتغير x هي f' الذي قيمته عند x هي:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وبشرط وجود النهاية.

مثال 1

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عندما $x = 3$:

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ التعريف العام للمشتقّة

$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ بتعويض $x = 3$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-(3)^2}{h}$ بتعويض $f(3+h)=(3+h)^2,\ f(3) = (3)^2$

$= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h}$ بالتبسيط

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h}$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$= \lim_{h\to 0} (6+h)$ بالقسمة على h

$= 6$ بتعويض $h = 0$

أتعلم

$f(x+h) \neq f(x)+f(h)$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = 4x^2 + 1$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة؛ عندما $x = -1$.

يُمكن استعمال التعريف العام للمشتقّة؛ لإيجاد اقتران جديد يُمثّل **مشتقّة الاقتران الأصلي**.

مثال 2

أجد مشتقّة الاقتران $y = x^3$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ التعريف العام للمشتقّة

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-(x)^3}{h}$$ بتعويض $f(x+h)=(x+h)^3,\ f(x) = x^3$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3hx+h^2)}{h}$$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2+3hx+h^2)$$ بالقسمة على h

$$= 3x^2$$ بتعويض $h = 0$

معلومة

يعود تاريخ إيجاد المشتقة باستعمال النهايات إلى القرن السابع عشر الميلادي، ويرتبط بالرياضيين إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتس؛ إذ اكتشفاه بشكل مستقل.

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة الاقتران $y = 8 - x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

مشتقّة اقترانات القوّة

يُسمّى الاقتران $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، **اقتران قوّة** (power function) ومن أمثلته:

$$f(x) = x^7 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad h(x) = \sqrt{x^3}$$

إنّ إيجاد المشتقّة باستعمال التعريف العام للمشتقّة ليس سهلًا في كثير من الأحيان؛ ولكن توجد بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد المشتقّة، ومنها مشتقّة اقتران القوّة.

مشتقّة اقتران القوّة

مفهوم أساسي

بالكلمات: عنـد اشـتقاق الاقتران $y = x^n$، حيـث n عدد حقيقي؛ فـإنّ أس x في المشـتقّة يكون أقـل بواحد من أس x فـي الاقتران الأصلـي، ويكون معامل x في المشتقّة مساويًا لأس x في الاقتران الأصلي.

بالرموز: إذا كان $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

مثال 3

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $y = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ بالتبسيط

3 $y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ تعريف الأُسّ السالب

أتذكّر

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-11}$

b) $y = \frac{1}{x^5}$

c) $y = \sqrt[3]{x^5}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد مشتقّة الاقترانات، التي تحتوي على أكثر من حدّ من اقترانات قوة.

مفهوم أساسي

قواعد أخرى لمشتقّة اقترانات القوة

مشـــتقّة الثابت: إذا كان $y = c$ حيث c عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 0$، أي إنّ مشـــتقّة الثابت تساوي صفرًا.

مشتقّة مضاعفات القوّة: إذا كان $y = ax^n$، حيث n و a عددان حقيقيان؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.

مشتقّة المجموع ومشتقة الفرق: إذا كان $y = u(x) + v(x)$، حيث u و v اقترانا قوة؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

مثال 4

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{y = x + 2\sqrt[3]{x}}$

$y = x + 2\sqrt[3]{x} = x + 2x^{\frac{1}{3}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \times \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ قاعدتا مشتقّتَي مضاعفات القوى، والمجموع

$= 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $\boldsymbol{y = \frac{5 - 7x}{x}}$

$y = \frac{5 - 7x}{x} = \frac{5}{x} - \frac{7x}{x}$ بقسمة كلّ حد في البسط على x

$= 5x^{-1} - 7$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = (-5)x^{-2} - 0$ قواعد مشتقّات الثابت، ومضاعفات القوّة، والفرق

$= -\frac{5}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$

b) $y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}$

تعرّفتُ سابقًا أنّ السرعة اللحظية، تساوي مشتقّة اقتران المسافة عند لحظة ما، ويُمكنني الآن استعمال قواعد المشتقّة التي تعرّفتُ إليها في هذا الدرس في إيجاد السرعة اللحظية.

مثال 5 : من الحياة

إذا كانت المسافة بالأمتار التي قطعها عدّاء في 5 ثوانٍ تُعطى بالاقتران $f(t) = 10t^{\frac{3}{2}} - 3t^2$، حيث t الزمن بالثانية. أجد سرعة العدّاء بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

السرعة هي مشتقّة اقتران المسافة، والمطلوب إيجاد السرعة عندما $t = 3$

$$f'(x) = 10 \times \frac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}} - 3 \times 2t \qquad \text{مشتقّة اقتران المسافة}$$

$$= 15 \times \sqrt{t} - 6t \qquad \text{بالتبسيط}$$

$$f'(3) = 15 \times \sqrt{3} - 6(3) \qquad \text{بتعويض } t = 3$$

$$\approx 7.98 \qquad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

إذن: سرعة العدّاء بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته هي 7.98 m/s تقريبًا.

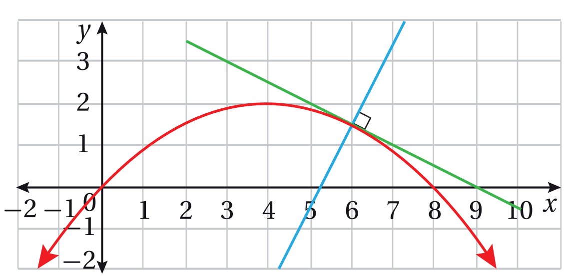
أقصى سرعة جري للإنسان سُجّلت هي 12.4 m/s وذلك خلال سباق 100 m

أتحقّق من فهمي

يُمثّل الاقتران $s = t^3 - \sqrt{t}$ المسافة التي يقطعها جسم متحرّك بالأمتار، حيث t الزمن بالثانية. أجد سرعة الجسم بعد 4 ثوانٍ من بدء حركته.

معادلة المماس والعمودي على المماس عند نقطة.

يُمثّل المستقيم الأخضر في الشكل المجاور مماسًّا للاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$ عند النقطة $(6, 1.5)$، ويُمثّل المستقيم الأزرق عمودًا على المماس.



يُسمّى المستقيم الأزرق **العمودي على المماس** (the normal) عند النقطة $(6, 1.5)$، ويُمكن استعمال المشتقّة في إيجاد معادلة المماس والعمودي على المماس عند نقطة على منحنى الاقتران.

مثال 6

إذا كان الاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

الاقتران الأصلي	$y = x - \frac{1}{8}x^2$
قاعدة مشتقّة اقتران القوة والفرق	$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{4}x$
بتعويض $x = 6$	$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=6} = 1 - \frac{1}{4}(6)$
بالتبسيط	$= -0.5$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بتعويض $x_1 = 6 , y_1 = 1.5, m = -0.5$	$y - 1.5 = -0.5\,(x - 6)$
بالتبسيط	$y = -0.5x + 4.5$

إذن: معادلة المماس هي: $y = -0.5x + 4.5$

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

بما أنّ ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ يساوي -0.5 فإنّ ميل العمودي على المماس يساوي 2، ومنه: فإنّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ هي:

$$y - 1.5 = 2(x - 6)$$

$$y = 2x - 10.5$$

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = 8x - \frac{1}{x}$؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عن النقطة $(0.25, -2)$.

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقّة عندما $x = a$

أتذكّر

إذا تعامد مستقيمان؛ فإنّ حاصل ضرب ميليهما يساوي -1

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كلّ من الاقترانات الآتية؛ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عند النقطة المعطاة:

1) $y = x^2 + 3x + 1, x = 3$

2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}, x = 2$

3) $y = (2x + 3)^2, x = -1$

أجد مشتقّة كلّ من الاقترانات الآتية؛ باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

4) $y = \frac{x - 3}{x^2}$

5) $y = x(x + 2)$

6) $y = \frac{1}{x - 1}$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

7) $y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$

8) $y = x^8 - x^{-8}$

9) $y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$

10) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$

11) $y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$

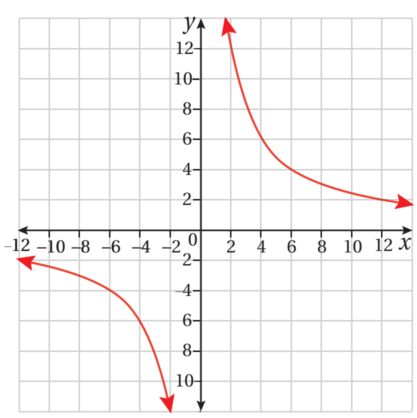
12) $y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$

إذا كان الاقتران $y = x^2 - x$ ؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

13) معادلة المماس عندما $x = 4$

14) معادلة العمودي على المماس عندما $x = 4$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = \frac{24}{x}$.



15) أجد $f'(x)$.

16) أُبيّن أنّ ميل المماس سالب دائمًا عند أيّ نقطة.

17) أجد معادلة العمودي على المماس عندما $y = -6$

18) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $y = (x-3)(x-5)$، عند نقطتي تقاطعه مع محور x.

19) يُمثّل الاقتران $s = 10\sqrt{t} + t + \pi$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جُسيم متحرّك، حيث t الزمن بالثانية. أجد سرعة الجُسيم بعد ثانية واحدة من بدء حركته.

معلومة

تُستعمل الطائرات من دون طيار بكثرة في صناعة الأفلام؛ لتصوير لقطات جميلة.

20 **طائرة:** أقلعت طائرة من دون طيار عموديًّا في رحلة مدتها 20 ثانية. فإذا كان ارتفاع الطائرة بالأمتار يُعطى بالاقتران $h = 2t^2 - t^3$، حيث t الزمن بالثواني؛ فأجد سرعة الطائرة بعد 10 ثوانٍ من إقلاعها.

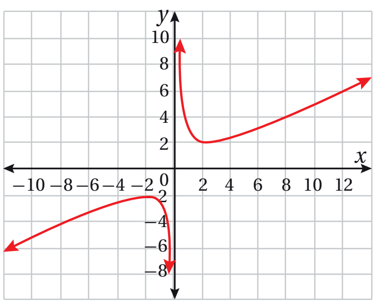
إذا كان منحنى الاقتران C يُعطى بالمعادلة $y = \sqrt[3]{8x}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

21 أجد مشتقّة الاقتران عند النقطة $P(125, 10)$.

22 إذا كان الاقتران D هو الاقتران العكسي للاقتران C، وكانت النقطة Q انعكاسًا للنقطة P؛ فأُبيّن أنّ مشتقّة الاقتران D عند النقطة Q تساوي مقلوب مشتقّة الاقتران C عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبريرٌ: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$



23 أُبيّن أنّ ميل المماس عند النقطتين $(2, 2)$ و $(-2, -2)$ يساوي صفرًا.

24 أثبت أنّه إذا كان x عددًا كبيرًا جدًّا؛ فإنّ ميل المماس عنده يساوي 0.5 تقريبًا.

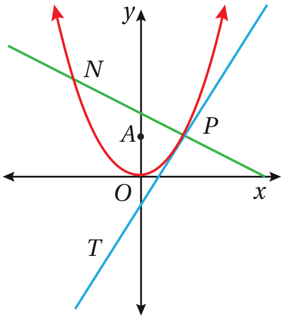
تبريرٌ: إذا كان الاقتران $y = x^2 + 4x$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

25 أُثبت أنّ معادلة المماس عند النقطة $x = k$ هي $y-(2k+4)x - k^2 = 0$

26 أجد قيمة k التي تكون عندها معادلة العمودي على المماس هي: $4y + x = 0$

تحدٍّ: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x^2$، الذي تقع النقطة $P(a, a^2)$ على منحناه. إذا علمت ما يأتي:

- يقطع مماس المنحنى عند النقطة P المحور y في النقطة T.
- يقطع العمودي على المماس عند النقطة P المحور y في النقطة N.
- تقع النقطة A على المحور الإحداثي y، إذ إنّ $\overline{AP}$ يوازي المحور x.



27 أُثبتُ أنّ $OA = OT$

28 أُثبتُ أنّ $AN = \frac{1}{2}$

الدرس 2

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

فكرة الدرس استعمال قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقّة الاقتران الناتج عن تركيب اقترانين كلّ منهما مكوّن من اقترانات قوّة.

المصطلحات قاعدة السلسلة.

مسألة اليوم يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مِساحة سطح الفقاعة؛ عندما يكون نصف قطرها 2.8 cm

مشتقة الاقتران الناتج عن تركيب اقتراني قوة

تعلّمتُ سابقًا مفهوم الاقتران المُركّب، ومن أمثلته $h(x)=(3x^3+2)^5$ الذي مُركّبتاه

$g(x) = 3x^3 + 2$ و $f(x) = x^5$، حيث $h(x) = (fog)(x)$

$$h(x) = \underbrace{(\overbrace{3x^3 + 2}^{\text{الداخلي}})^5}_{\text{الخارجي}}$$

لغة الرياضيّات

يُسمّى $g(x)$ اقترانًا داخليًّا للاقتران المُركّب، ويُسمّى $f(x)$ اقترانًا خارجيًّا له.

وسأتعلّم في هذا الدرس كيفية اشتقاق بعض الاقترانات المركّبة الناتجة عن تركيب اقترانين كلّ منهما مكوّن من اقترانات قوّة.

أتعلم

يتكون الاقتران $g(x) = 3x^3 + 2$ من اقتراني قوة هما $3x^3$ و 2

إذا أردتُ اشتقاق الاقتران المُركّب $h(x) = (3x^3+2)^5$؛ فيُمكنني فكّ الأقواس، واشتقاق كلّ حدّ من حدود المقدار الجبري الناتج، ولكنّ هذا ليس بالأمر السهل، في حين يُمكن أيضًا إيجاد مشتقّة الاقتران المُركّب بطريقة أبسط؛ عن طريق اشتقاق الاقتران الخارجي، وإيجاد قيمته عند الاقتران الداخلي، ثم ضربه في مشتقّة الاقتران الداخلي، وهذا يُسمّى **قاعدة السلسلة** (chain rule).

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانيـــن قابليـــن للاشـــتقاق، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشـــتقة الاقتران المُركَّب: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$، حيث تُحسَب قيمة $\frac{dy}{du}$ عندما $u = g(x)$.

أتعلم

سأتعلّم في هذا الدرس، إيجـاد مشـتقّة تركيـب اقترانيـن مكوّنيـن مـن اقترانات قوّة فقط.

مثال 1

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي والاقتران الخارجي للاقتران المُركّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركّب هو $u = 5x^3 - 2x$ والاقتران الخارجي هو $y = u^4$

أتعلم

يتكـوّن الاقتـران u من اقترانَـي قوّة همـا: $5x^3$ و$-2x$

مشتقّة الاقتران الداخلي $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2$

مشتقّة الاقتران الخارجي $\frac{dy}{du} = 4u^3$

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران المُركّب؛ باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بالتعويض $\frac{dy}{du} = 4u^3$، $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2$: $= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$

بتعويض $u = 5x^3 - 2x$: $= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$

2 $y=\frac{1}{(1-4x^2)^3}$

الخطوة 1: أكتبُ الاقتران على الصورة الأُسّية.

$$y=\frac{1}{(1-4x^2)^3}=(1-4x^2)^{-3}$$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي والاقتران الخارجي للاقتران المُركّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركّب هو $u=1-4x^2$ والاقتران الخارجي هو $y=u^{-3}$

$$\frac{du}{dx}=-8x$$ مشتقّة الاقتران الداخلي

$$\frac{dy}{du}=-3u^{-4}$$ مشتقّة الاقتران الخارجي

الخطوة 3: أجد مشتقّة الاقتران المُركّب؛ باستعمال قاعدة السلسلة.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$=-3u^{-4}\times -8x$$ بالتعويض $\frac{dy}{du}=-3u^{-4}$, $\frac{du}{dx}=-8x$

$$=24x(1-4x^2)^{-4}$$ بتعويض $u=1-4x^2$

$$=\frac{24x}{(1-4x^2)^4}$$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y=(2x^4-8)^{\frac{5}{3}}$

b) $y=\frac{13}{(x^2-8)^7}$

أُلاحظ من المثال السابق، أنّه يُمكن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركّب على الصورة $y=(g(x))^n$، حيث $g(x)$ اقتران مكوّن من اقترانات قوّة باستعمال النتيجة الآتية:

نتيجة

إذا كان $y=(g(x))^n$، حيث n عدد حقيقي و $g(x)$ اقتران مكوّن من اقترانات قوّة؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}=n(g(x))^{n-1}\times g'(x)$.

يُمكن إيجاد مشتقّة الاقتران المُركّب على الصورة $y = (g(x))^n$ عند أي نقطة كما في المثال الآتي.

مثال 2

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي، عند النقطة المعطاة:

1 $f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 1}\ ,\ x = 1$

بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية
$$f(x) = (2x^3 - 1)^{\frac{1}{5}}$$

قاعدة السلسلة وقاعدة مشتقّة اقتران القوّة
$$f'(x) = \frac{1}{5}(2x^3 - 1)^{-\frac{4}{5}} \times (6x^2)$$

تعريف الأُسّ السالب
$$= \frac{6x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3-1)^4}}$$

بتعويض $x = 1$
$$f'(1) = \frac{6}{5}$$

2 $y = (1-x^3)^{\frac{4}{7}}\ ,\ x = -2$

قاعدة السلسلة وقاعدة مشتقّة اقتران القوّة
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{7}(1-x^3)^{-\frac{3}{7}} \times (-3x^2)$$

تعريف الأُسّ السالب
$$= \frac{-12x^2}{7\sqrt[7]{(1-x^3)^3}}$$

بتعويض $x = -2$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{-48}{7\sqrt[7]{729}}$$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي، عند النقطة المعطاة:

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4 + 1}\ ,\ x = -1$

b) $y = (2x-5)^{\frac{2}{3}}\ ,\ x = 0$

تعلّمتُ في الأمثلة السابقة، قاعدة اشتقاق الاقتران المُركّب على صورة $y = (g(x))^n$، حيث n عــدد حقيقي، و $g(x)$ اقتران مكوّن من اقترانات قوّة. ويُمكن اشــتقاق حالة خاصة من هذا الاقتران وهي: $y = (ax+b)^n$ حيث مشتقة $ax + b$ تساوي a من خلال النتيجة الآتية:

نتيجة

إذا كان $y = (ax+b)^n$، حيث a, b, n أعداد حقيقية؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = n(ax+b)^{n-1} \times a$.

مثال 3 أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y=(3x+1)^5$

$\frac{dy}{dx}=5(3x+1)^4\times 3$ قاعدة مشتقّة الاقتران المُركّب

$=15(3x+1)^4$ بالتبسيط

2 $y=\sqrt{1-7x}$

$y=\sqrt{1-7x}=(1-7x)^{\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-7x)^{-\frac{1}{2}}\times -7$ قاعدة مشتقّة الاقتران المُركّب

$=\frac{-7}{2\sqrt{1-7x}}$ تعريف الأُسّ السالب

3 $y=\frac{1}{8x+11}$

$y=\frac{1}{8x+11}=(8x+11)^{-1}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx}=-1\,(8x+11)^{-2}\times 8$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$=\frac{-8}{(8x+11)^2}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقّق من فهمي أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y=(4x+9)^7$ b) $y=\sqrt[3]{1-10x}$ c) $y=\frac{1}{2x-7}$

معدّل التغيّر بالنسبة إلى الزمن

تعلّمتُ سابقًا أنّ المشتقّة هي نهاية ميل القاطع عندما تقترب المسافة الأفقية بين طرفي القاطع من الصفر، وبما أنّ ميل القاطع هو معدّل تغيّر قيمة y بالنسبة إلى قيمة x؛ فإنّ المشتقّة هي معدّل تغيّر أيضًا، ولكن عند لحظة (نقطة) معيّنة. فعند إيجاد $\frac{dy}{dx}$ فهذا يعني إيجاد معدّل تغيّر y بالنسبة إلى x.

تتغيّر القِيَم في كثير من المواقف الحياتية بالنسبة إلى الزمن، فمثلًا إذا كانت r كمّية معيّنة؛ فإنّ معدّل تغيّرها بالنسبة إلى الزمن t هو $\frac{dr}{dt}$، وإذا افترضتُ أنّ r هو نصف قطر بالون كروي الشكل حجمه v وحدة مكعّبة، وكان معدّل تغيّر حجم البالون بالنسبة إلى الزمن $\frac{dv}{dt}$ معلومًا؛ فكيف أجد معدل تغيّر طول نصف قطر البالون بالنسبة إلى الزمن؟ $\frac{dr}{dt}$ بكلمات أُخرى، كيف أجد $\frac{dr}{dt}$ إذا علمتُ قيمة $\frac{dv}{dt}$؟ يُمكن الإجابة عن مثل هذا النوع من الأسئلة باستعمال قاعدة السلسلة.

تُلوّث السفن المجاري المائية والمحيطات بعدّة طرائق، مثل تسرّب النفط أو المواد الكيميائية، ما يُشكّل تهديدًا متزايدًا للحياة البحرية.

مثال 4 : من الحياة

تسرّب نفط من ناقلة بحرية، مكوّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمعدل $50\ \text{m}^2/\text{min}$. أجد سرعة تزايد نصف قطر بقعة النفط، عندما يكون نصف قطرها $20\ \text{m}$.

إذا كان نصف قطر بقعة النفط الدائرية الشكل r مترًا، ومساحتها $A\ \text{m}^2$؛ فإنّ معدّل تغيّر مِساحة بقعة النفط بالنسبة إلى الزمن $\frac{dA}{dt} = 50$.

الخطوة 1 : أجد مشتقّة مِساحة الدائرة بالنسبة إلى نصف القطر.

$A = \pi r^2$ قانون مِساحة الدائرة

$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ مشتقّة المِساحة بالنسبة إلى نصف القطر

الخطوة 2 : أجد معدّل تغيّر نصف القطر بالنسبة إلى الزمن؛ باستعمال قاعدة السلسلة.

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$ قاعدة السلسلة

$50 = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$ بالتعويض $\frac{dA}{dr} = 2\pi r, \frac{dA}{dt} = 50$

$\frac{dr}{dt} = \frac{25}{\pi r}$ بقسمة طرفي المعادلة على $2\pi r$

$= \frac{25}{\pi \times 20}$ بتعويض $r = 20$

≈ 0.398 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: معدّل تغيّر نصف القطر بالنسبة إلى الزمن $0.398\ \text{m/min}$ تقريبًا.

لغة الرياضيّات

تُعدّ كلمة السرعة من المصطلحات التي تدلّ على معدّل التغيّر بالنسبة إلى الزمن، فالسرعة معدّل تغيّر المسافة بالنسبة إلى الزمن.

أتحقّق من فهمي

يُنفخ بالون على شكل كرة؛ بحيث يزداد حجمه بمعدّل $30\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد معدّل زيادة نصف قطر البالون؛ عندما يكون:

a) نصف القطر $4\ \text{cm}$

b) نصف القطر $8\ \text{cm}$

أتعلّم

أستعمل الإشارة الموجبة للدلالة على معدّلات التغيّر المتزايدة، أمّا معدّلات التغيّر المتناقصة فأُعبّر عنها باستعمال الإشارة السالبة.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (4x+2)^2$

2) $y = (8-x)^{10}$

3) $g(x) = (1+3x^2)^5$

4) $y = (6x-5x^2)^{-8}$

5) $y = (\pi - x^2)^3$

6) $h(x) = \sqrt{6x-1}$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي، عند النقطة المعطاة:

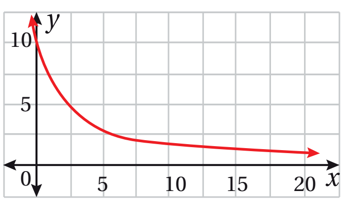
7) $h(x) = \sqrt{(2-x)^5} + 16 \, , x = -4$

8) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \, , x = 16$

9) $y = \dfrac{2}{(x^2-13)^{\frac{4}{7}}} \, , x = 1$

10) $h(x) = 1 - \sqrt{x} \, , x = \dfrac{1}{4}$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $x > -2$, $y = \dfrac{20}{2+x}$



11) أجد ميل المماس عند النقطة $(2, 5)$.

12) أجد إحداثيّات النقطة التي يكون عندها ميل المماس -0.2

13) أجد معادلة العمودي على المماس عند نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y

إذا كان $y = \sqrt{2x+5}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

14) أُثبتُ أنّ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$

15) أجد النقطة التي يقطع عندها مماس الاقتران عند النقطة $(2, 3)$ المحور x.

إذا كان $y = \dfrac{600}{x^2+50}$.

16) أجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x = 1$.

17) أجد معادلة المماس عند النقطة $(10, 4)$.

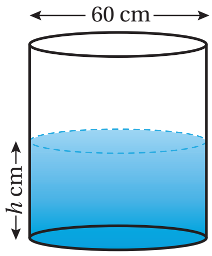
إذا كان الاقتران $f(x) = \sqrt{100-x^2}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

18) أجد مشتقّة الاقتران عند النقطة $P\,(-6, 8)$.

19) أُثبتُ أنّ المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة P عموديٌّ على مماس الاقتران عند النقطة P.

20 إذا كان الاقتران $y = (2x^2-3x+1)^5$؛ فأُثبتُ أنّ: $\frac{dy}{dx} = 5(4x-3)(2x-1)^4 (x-1)^4$

21 إذا كان الاقتران $y = \sqrt{a + bx^2}$ حيث $a, b > 0$؛ فأُثبتُ أنّ: $\frac{x}{y} = c\frac{dy}{dx}$، حيث a, b, c ثوابت. أُبرّر إجابتي.



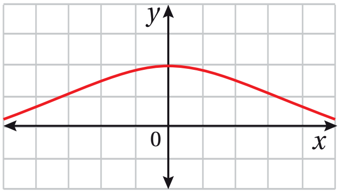
22 يُبيّن الشكل المجاور خزّان ماء أسطواني الشكل، إذا كانت كمّية الماء في الخزان تزداد بمعدل $0.4\ L/s$؛ فأجد معدّل تغيّر عمق الماء في الخزان عندما يكون ارتفاع الماء في الخزان h cm.

23 يزداد حجم مكعّب بمعدّل $50\ cm^3/s$. أجد معدّل زيادة مِساحة سطح المكعّب؛ عندما يكون طول ضلع المكعّب 5 cm

24 إذا كان المتغيّران u و w مرتبطين بالعلاقة $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المتغيّر w تزداد مع الزمن t وفقًا للعلاقة $w = 0.05t + 8$؛ فأجد معدّل تغيّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$.

25 يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمعدّل ثابت مقداره $0.6\ cm^3/s$ محافظًا على شكله الكروي. أجد معدّل تناقص نصف قطر المنطاد، عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر 2.5 m

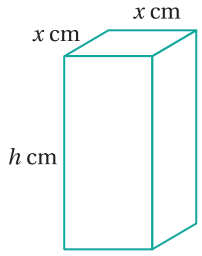
مهارات التفكير العليا



26 **تبرير: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = \frac{a}{1+x^2}$, $a > 0$. أُبيّن أنّ مماس منحنى الاقتران عند $x = 1$ ومنحنى الاقتران يقطعان المحور y عند النقطة نفسها. أُبرّر إجابتي.**

27 تحدّ: أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$، عندما $x = -1$

28 تحدّ: أُثبتُ أنّ مماس منحنى الاقتران $y = (x^2 + x-2)^3 + 3$ عند النقطة $(1, 3)$، هو أيضًا مماس للمنحنى عند نقطة أُخرى.



29 تحدّ: يُبيّن الشكل المجاور متوازي مستطيلات قاعدته مربّعة الشكل وحجمه $1000\ cm^3$. إذا كان طول ضلع قاعدة المتوازي يزداد بمعدل $0.2\ cm/s$؛ فأجد معدل تغيّر الارتفاع عندما يصبح الشكل مكعّبًا.

الدرس
3

القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود

Maximum and Minimum Values of Polynomials

فكرة الدرس تحديد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة وأنواعها لكثيرات الحدود وتمثيلها بيانيًّا؛ باستعمال المشتقّة.

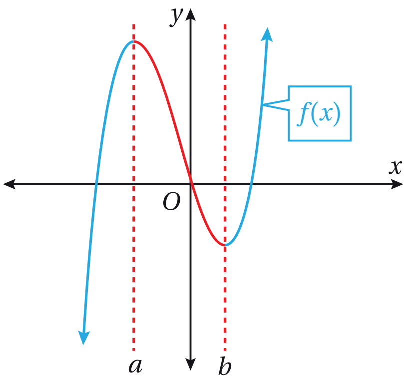
المصطلحات متزايد، متناقص، نقطة حرجة، قيمة حرجة، نقطة صغرى محلّية، نقطة عظمى محلّية، نقطة انعطاف أُفقي، المشتقّة الثانية، اختبار المشتقّة الثانية.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتران $h(t) = -5t^2 + 10t$، ارتفاع دلفين (بالمتر) فوق سطح الماء بعد t ثانية من ظهوره فوق سطح الماء.

- ما أقصى ارتفاع يصل إليه الدلفين؟
- أصف حركة الدلفين خارج الماء.
- هل يُمكن تمثيل منحنى حركة الدلفين من دون إنشاء جدول قِيَم؟

تزايد كثيرات الحدود وتناقصها

يُمثّل الشكل المجاور منحنى اقتران كثير الحدود $f(x)$



أُلاحظ أنّ قِيَم y تزداد في الفترة $-\infty < x < a$، والفترة $b < x < \infty$، حيث يرتفع منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متزايدًا** (increasing) في هاتين الفترتين. أُلاحظ –أيضًا– أنّ قِيَمَ y تقل في الفترة $a < x < b$، حيث ينخفض منحنى الاقتران من اليسار إلى اليمين؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

أتعلّم

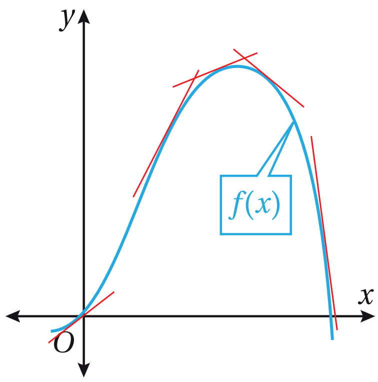
تُكتب فترات التزايد على صورة الفترة المفتوحة (a, b)، لأنّ التزايد يبدأ من يمين النقطة a وينتهي عند يسار النقطة b، وكذلك الأمر بالنسبة إلى فترات التناقص.

مفهوم أساسي **تزايد الاقتران وتناقصه**

- يكون الاقتران f متناقصًا في الفترة I، إذا كان لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة $f(x_1) > f(x_2)$.
- يكون الاقتران f متزايدًا في الفترة I، إذا كان لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة $f(x_1) < f(x_2)$.

تعلّمتُ سابقًا أنّ مشتقّة الاقتران عند نقطة، تساوي ميل المماس عند تلك النقطة. ولكن، كيف يُمكن استعمال المشتقّة في دراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $f(x)$. أُلاحظ أنّ:



- المماسات ذات الميل الموجب، مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماسات ذات الميل السالب، مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.

وهذا يقود إلى الاستفادة من إشارة المشتقّة، في تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران.

نظرية

- إذا كان $f'(x) > 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة I؛ فإنّ f يكون متزايدًا على الفترة I.
- إذا كان $f'(x) < 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة I؛ فإنّ f يكون متناقصًا على الفترة I.

مثال 1

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 2x - 3$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = 2x + 2$ مشتقّة الاقتران

$2x + 2 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$2x = -2$ بطرح 2 من كلا الطرفين

$x = -1$ بقسمة الطرفين على 2

إذن: صفر المشتقّة $x = -1$

الخطوة 2: أبحثُ في إشارة المشتقّة.

أختار قيمة أقلّ من صفر المشتقّة (−2) وأخرى أكبر منه (0)، وأُحدّد إشارة المشتقّة عند كلّ منهما.

$$\underset{-1}{\overset{-\,-\,-\,-\,-\quad\quad +\,+\,+\,+\,+}{\longleftrightarrow}}\; x$$

الفترة	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
سلوك الاقتران	متناقص ↘	متزايد ↗

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتزايد في الفترة $(-1, \infty)$.

2 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$ مشتقّة الاقتران

$-6x^2 + 6x + 36 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$-6(x^2 - x - 6) = 0$ بإخراج −6 عاملًا مشتركًا

$x^2 - x - 6 = 0$ بقسمة الطرفين على −6

$(x + 2)(x - 3) = 0$ بالتحليل

$(x + 2) = 0 \quad or \quad (x - 3) = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$x = -2 \qquad\qquad x = 3$ بحلّ المعادلتين الناتجتين

إذن: أصفار المشتقّة $x = -2, x = 3$

الخطوة 2: أبحثُ في إشارة المشتقّة.

أختار بعض القِيَم الأصغر من أصفار المشتقّة والأكبر منها، ثم أُحدّد إشارة المشتقّة عند كلّ منها.

$$\underset{-2 \qquad\qquad 3}{\overset{-\,-\,-\,-\,-\quad +\,+\,+\,+\,+\quad -\,-\,-\,-\,-}{\longleftrightarrow}}\; x$$

الفترة	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(4) < 0$
سلوك الاقتران	متناقص ↘	متزايد ↗	متناقص ↘

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(3, \infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

أتذكّر

يكون الاقتران متزايدًا؛ عندما تكون $f'(x) > 0$، ومتناقصًا عندما $f'(x) < 0$.

أتذكّر

إذا كان $a \times b = 0$، فإنّه: إمّا $a = 0$ وإمّا $b = 0$ وإمّا كلاهما يساوي صفرًا.

أتذكّر

إذا كان للاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ صفران حقيقيان مختلفان هما x_1 و x_2؛ فإنّه يُمكن تحديد الإشارة على جانبَي الصفرين وبينهما كالآتي:

نفس إشارة a | x_1 | عكس إشارة a | x_2 | نفس إشارة a

أتحقّق من فهمي

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

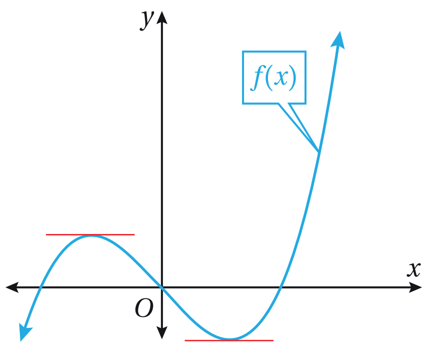
b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

أتعلّم

- يُسمّى الاقتران $f(x) = x^3$ اقترانًا متزايدًا؛ لأنّ $f'(x) \geq 0$ لقِيَم x جميعها.
- يُسمّى الاقتران $f(x) = -x^3$ اقترانًا متناقصًا؛ لأنّ $f'(x) \leq 0$ لقِيَم x جميعها.

النقاط الحرجة لكثيرات الحدود وأنواعها

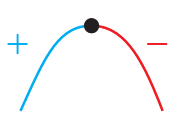
يُمثّل الشكل المجاور منحنى كثير الحدود $f(x)$.



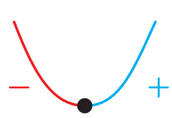
تُسمّى النقطة التي يُمكن رسم مماس أُفقي عندها **نقطة حرجة** (critical point)، وهذا يعني أنّ مشتقّة الاقتران عندها تساوي صفرًا $(f'(x) = 0)$، ويُسمّى الإحداثي x للنقطة الحرجة **قيمة حرجة** (critical value).

يُمكن استعمال المشتقّة؛ لتصنيف النقاط الحرجة لكثيرات الحدود:

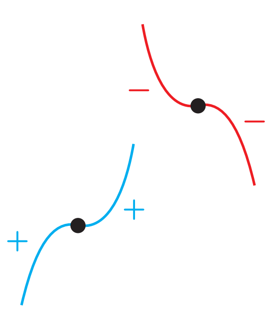
- **نقطة عظمى محلّية** (local maximum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متزايدًا وعن يمينها متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، تتغيّر من الموجب إلى السالب.



- **نقطة صغرى محلّية** (local minimum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متناقصًا وعن يمينها متزايدًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، تتغيّر من السالب إلى الموجب.



- **نقطة انعطاف أفقي** (horizontal point of inflection): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران حولها إمّا متزايدًا وإمّا متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، تكون إمّا موجبة وإمّا سالبة.



أتعلّم

- القيمة العظمى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة العظمى المحلّية، وتُسمّى كذلك لأنّها أكبر من القِيَم المجاورة لها.
- القيمة الصغرى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة الصغرى المحلّية، وتُسمّى كذلك لأنّها أصغر من القِيَم المجاورة لها.

مثال 2

إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2 - 6x - 2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 النقاط الحرجة للاقتران f.

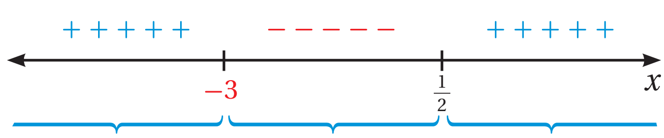
مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^2 + 10x - 6$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^2 + 10x - 6 = 0$
بإخراج 2 عاملًا مشتركًا	$2(2x^2 + 5x - 3) = 0$
بالقسمة على 2	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
بالتحليل	$(2x - 1)(x + 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$(2x-1) = 0 \quad or \quad (x + 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = \frac{1}{2} \qquad\qquad x = -3$

عندما $x = \frac{1}{2}$ فإنّ $y = -\frac{43}{12}$.

عندما $x = -3$ فإنّ $y = 25$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $(\frac{1}{2}, -\frac{43}{12})$ و $(-3, 25)$.

2 أُصنّف النقاط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.



الفترة	$x < -3$	$-3 < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 1$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(1) > 0$
سلوك الاقتران	متزايد	متناقص	متزايد

إذن: النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-43}{12})$ صغرى محلّية، والنقطة $(-3, 25)$ عظمى محلّية.

أتعلّم

النقطة الصغرى المحلّية ليست أقل نقطة على المنحنى، وإنّما هي فقط أقل من النقاط التي حولها، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة العظمى المحلّية؛ فهي ليست أعلى نقطة على المنحنى، إنّما هي فقط أعلى من النقاط التي حولها.

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

a) النقاط الحرجة للاقتران $f(x)$.

b) أُصنّف النقاط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية.

تعلّمتُ سابقًا أنّ اقتران المشتقّة هو اقتران جديد، وهذا يعني أنّه يُمكنني اشتقاقه.

يُسمّى الاقتران الذي نحصل عليه من اشتقاق الاقتران مرّتين **المشتقّة الثانية** (second derivative) أو اقتران المشتقّة الثانية، ويُرمز له بالرمز $f''(x)$. على سبيل المثال، إذا كان $f(x) = x^4$؛ فإنّ مشتقّة الاقتران هي: $f'(x) = 4x^3$، والمشتقّة الثانية للاقتران هي: $f''(x) = 12x^2$.

يُمكن تحديد إذا كانت النقطة الحرجة عظمى محلّية أم صغرى محلّية باستعمال المشتقّة الثانية وهو ما يُسمّى **اختبار المشتقة الثانية** (the second–derivative test)، فإذا كانت المشتقّة الثانية عند القيمة الحرجة موجبة؛ فإنّ النقطة الحرجة هي صغرى محلّية، أمّا إذا كانت المشتقّة الثانية عند القيمة الحرجة سالبة؛ فإنّ النقطة الحرجة هي عظمى محلّية.

رموز رياضية

تُستعمل الرموز $f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, y''$ للتعبير عن المشتقّة الثانية.

أتعلّم

إذا كانت المشتقّة الثانية عند القيمة الحرجة تساوي صفرًا؛ عندها يفشل اختبار المشتقة الثانية؛ لذا، نحتاج إلى تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقّة الأولى.

مثال 3

إذا كان الاقتران $y = 1000 + 300x - x^3$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1 **النقاط الحرجة للاقتران.**

$\frac{dy}{dx} = 300 - 3x^2$ مشتقّة الاقتران

$300 - 3x^2 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$3(100-x^2) = 0$ بإخراج 3 عاملًا مشتركًا

$100 - x^2 = 0$ بقسمة الطرفين على 3

$-x^2 = -100$ بطرح 100 من طرفي المعادلة

$x^2 = 100$ بقسمة الطرفين على -1

$x = \pm 10$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

عندما $x = 10$ فإنّ $y = 3000$.

عندما $x = -10$ فإنّ $y = -1000$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $(-10, -1000)$, $(10, 3000)$.

2 **أُصنّف النقاط الحرجة إلى صغرى محلّية أو عظمى محلّية؛ باستعمال المشتقّة الثانية.**

الخطوة 1: أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

المشتقة الثانية للاقتران $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$

الخطوة 2: أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية، لتصنيفها.

- القيمة الحرجة الأولى: إذا كانت $x = 10$ فإنّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -60 < 0$$

إذن: $(10, 3000)$ نقطة عظمى محلّية.

- القيمة الحرجة الثانية: إذا كانت $x = -10$ فإنّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60 > 0$$

إذن: $(-10, -1000)$ نقطة صغرى محلّية.

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = x^3 - 3x^2 + 1$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

a) أجد النقاط الحرجة للاقتران.

b) أُصنّف النقاط الحرجة إلى صغرى محلّية أو عظمى محلّية؛ باستعمال المشتقّة الثانية.

أتعلّم

يُفضّل تحديد المقطع x و المقطع المحور y في بعض الاقترانات للحصول على تمثيل أكثر دقّة للاقتران.

تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا.

يُساعد إيجاد النقاط الحرجة للاقتران وتحديد نوعها، عند تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا؛ فهو يُعطي تصوّرًا لشكل منحنى الاقتران.

مثال 4

أُمثّل الاقتران $f(x) = x^4 - 2x^3$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أجد النقاط الحرجة للاقتران.

مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^3 - 6x^2 = 0$
بإخراج $2x^2$ عاملًا مشتركًا	$2x^2(2x - 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$2x^2 = 0 \quad or \quad (2x - 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$

أتعلّم

اقتصر هذا الدرس على دراسة خصائص اقترانات كثيرات الحدود فقط.

عندما $x = \frac{3}{2}$ فإنّ $f(\frac{3}{2}) = \frac{-27}{16}$.

عندما $x = 0$ فإنّ $f(0) = 0$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $(0, 0)$, $(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16})$.

الخطوة 2 : أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$ المشتقة الثانية للاقتران

الخطوة 3: أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية، لتصنيف النقاط الحرجة.

- **القيمة الحرجة الأولى:** إذا كانت $x = \frac{3}{2}$ فإنّ:

$$f''(\frac{3}{2}) = 9 > 0$$

إذن: $(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16})$ نقطة صغرى محلّية.

- **القيمة الحرجة الثانية:** إذا كانت $x = 0$ فإنّ:

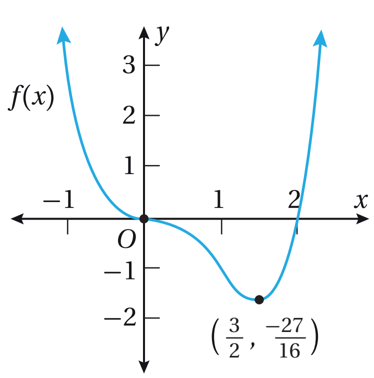
$$f''(0) = 0$$

بما أنّ $f''(0) = 0$ ، فإنّه لا يُمكنني تحديد نوع النقطة الحرجة باستعمال المشتقّة الثانية؛ لذا، ألجأ إلى دراسة إشارة المشتقّة الأولى حول النقطة لتحديد نوعها.

إذن: $(0, 0)$ نقطة انعطاف أُفقي.

x		0	
إشارة المشتقة	---	0	---

الخطوة 3: أُحدّد النقاط الحرجة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها مراعيًا في ذلك طبيعة كل نقطة وسلوك الاقتران حولها، كما يُمكن اختيار نقاط أخرى لتمثيل الاقتران إضافة إلى النقاط الحرجة؛ للحصول على تمثيل بياني أكثر دقّة للاقتران.



أتحقّق من فهمي

أُمثّل الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بيانيًّا.

أتذكّر

يكون منحنى الاقتران متناقصًا على يسار القيمة الصغرى، ومتزايدًا على يمينها.

أفكّر

لماذا رُسِم منحنى الاقتران متناقصًا حول نقطة الانعطاف الأُفقي $(0, 0)$؟

يُمكن اســتعمال التمثيل البياني لكثيرات الحدود في الكثير من المواقف الحياتية، منها رسم منحنى الأفعوانيات في مدن الألعاب.

مثال 5 : من الحياة

يُمثّل الاقتــران $f(t) = t^3 - 3t^2 + 10$ ارتفاع أفعوانية بالأمتار؛ حيث t الزمن بالثواني. أُمثّل بيانيًّا مسار الأفعوانية في الثواني الأربع الأولى من حركتها.

بما أنّ منحنى $f(t)$ يُمثّل مســار الأفعوانيــة؛ إذن: أُمثّل منحنى الاقتــران $f(t)$ بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 4$.

الخطوة 1: أجد النقاط الحرجة للاقتران في الفترة $0 < t < 4$

مشتقّة الاقتران	$f'(t) = 3t^2 - 6t$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$3t^2 - 6t = 0$
بإخراج $3t$ عاملًا مشتركًا	$3t(t-2) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$3t = 0 \quad or \quad (t-2) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$t = 0 \qquad t = 2$

عندما $t = 0$ فإنّ $f(0) = 10$.

عندما $t = 2$ فإنّ $f(2) = 6$.

إذن: النقاط الحرجة هي: $(2, 6)$، $(0, 10)$، ولكن تستثنى النقطة $(0, 10)$ لأنها طرف فترة.

الخطوة 2: أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

المشتقة الثانية للاقتران	$f''(x) = 6t - 6$

الخطوة 3: أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية، لتصنيف النقط الحرجة.

- **القيمة الحرجة:** إذا كانت $x = 2$ فإنّ: $f''(2) = 6 > 0$

إذن: $(2, 6)$ نقطة صغرى محلّية.

الخطوة 4: أجد إحداثيّات نقطتَي طرفَي الفترة:

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 10 = 10$$
$$f(4) = 4^3 - 3(4)^2 + 10 = 26$$

إذن: نقطتا طرفَي الفترة $(0, 10)$ ، $(4, 26)$.

معلومة

إنّ المسار الذي تسلكه العربة الدوارة في الأفعوانية، قد يرتفع لدرجة كافية لتقلب راكبيها رأسًا على عقب، ولكنّ قوة التسارع التي تدفع العربة إلى الأمام تتغلّب على قوة الجاذبية. ومن ثمّ، تُكمل مسارها.

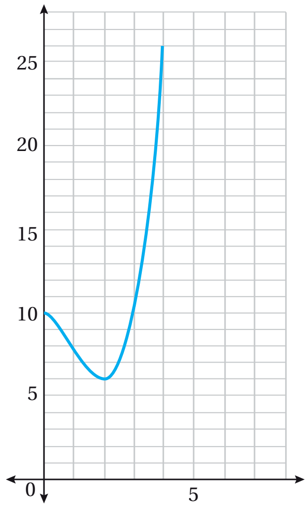
تنبيه

لا يُمكن تحديد نوع النقطة الحرجة $(0, 10)$ لأنّها طرف فترة؛ لذا، لا نعلم سلوك منحنى الاقتران عن يسارها.

أتعلّم

أقلّ ارتفاع للأفعوانية في الفترة المعطاة $6\ m$

الخطوة 5: أُحدّد نقطتي طرفي الفترة والنقطة الحرجة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها مراعيًا في ذلك طبيعة النقطة الحرجة وسلوك الاقتران حولها.



أتحقّق من فهمي

يُمثّل الاقتران $f(t) = 0.001t^3 - 0.12t^2 + 3.6t + 10$، ارتفاع الأفعوانية بالأمتار، حيث t الزمن بالثواني. أُمثّل بيانيًّا مسار الأفعوانية في الفترة $0 \le t \le 70$.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

2) $f(x) = (x^2 + 4)^3$

3) $f(x) = (x-2)^9$

4) $y = x^4 - 8x^2$

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة:

5) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

6) $y = -(x-2)^3 + 1$

7) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x$

8) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة الثانية:

9) $y = x^4 - 2x^2$

10) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

11) $y = x^2 (x-4)$

12) $f(x) = x^5 - 5x^3$

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

13) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

14) $y = x^2 - 12x - 20$

15) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$

16) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8$

17) إذا كانت مشتقّة الاقتران $f(x)$ تُعطى بالاقتران $f'(x) = (x-1)^2\,(x-3)$، فأجد قِيَم x التي يكون عندها نقاط حرجة للاقتران f، ثمّ أُحدّد نوعها.

معلومة

على الرغم من أنّ أنثى الضفدع تضع عددًا كبيرًا من البيوض؛ إلّا أنّ عدد الضفادع لا يزداد بشكل لا نهائي في البيئات التي تعيش فيها؛ لأنّ ازدياد عددها يُقلّل من الحصّة الغذائية لكلّ منها.

لوحظ أنّ عدد الضفادع في بحيرة يتغير وفق الاقتران $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيث P عدد الضفادع، وt الزمن بالأشهر منذ بدء ملاحظة الضفادع في البحيرة.

18) أجد أكبر عدد يُمكن أن تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

19) بعد كم شهرًا ستختفي الضفادع من البحيرة؟

20) أُمثّل الاقتران P بيانيًّا.

أقلعت طائرة من دون طيّار عموديًّا من الأرض، ثم عادت لتهبط رأسيًّا على الأرض في رحلة مدّتها 20 ثانية. فإذا كان الاقتران $h(t) = 0.2t^2 - 0.01t^3$ يُمثّل ارتفاع الطائرة بعد t ثانية من انطلاقها؛ فأُجيب عمّا يأتي:

21) أُمثّل الاقتران $h(t)$ بيانيًّا.

22) أُثبتُ أنّ الزمن اللازم لصعود الطائرة، يساوي مثلَي الزمن اللازم لهبوطها.

23) إذا كان الاقتران $y = ax^2 + bx + c$، يمرّ بالنقطتين $(0, -48)$، و $(6, 0)$، وله قيمة عظمى عندما $x = 7$؛ فأجد قِيَم الثوابت a و b و c.

يُمثّل الاقتران $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$، المسافة (بالمتر) التي يقطعها فهد بعد t ثانية من البدء بمطاردة فريسته.

24) أجد سرعة الفهد بعد 8 ثوانٍ من بدء حركته.

25) أُمثّل منحنى الاقتران s بيانيًّا.

إذا كان الاقتران $y = x(6-x^2)$؛ فأُجيب عما يأتي:

26 أُمثّل منحنى كلّ من الاقترانات: y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

27 أصف العلاقة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة، موظّفًا في ذلك مفهوم المشتقّة.

مهارات التفكير العليا

معلومة

تُعدّ أفضل زاويةٍ للوجه الأمامي لمضرب كرة التنس 50 درجةً تقريبًا بالنسبة إلى سطح الأرض، ما يجعل ضرب الكرة أسهل.

تبرير: يُمثّل الاقتران $y = 23t - 5t^2$ ارتفاع كرة مضرب (بالمتر) بعد t ثانية من ارتطامها بالمضرب.

28 أجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

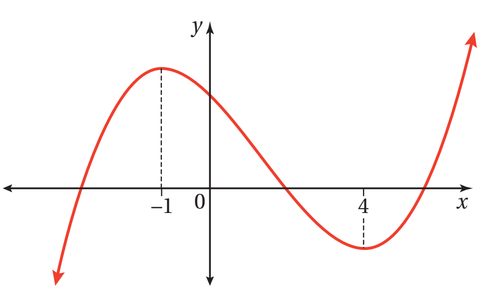
29 في السؤال السابق، أُهملت مقاومة الهواء في الاقتران y؛ كيف من المحتمل أن تؤثّر مقاومة الهواء في أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ أُبرّر إجابتي.

تحدّ: إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + b$، حيث a و b ثابتان؛ فأُجيب عمّا يأتي:

30 أُثبتُ أنّ لمنحنى الاقتران نقطة حرجة عند تقاطعه مع المحور y.

31 أُثبتُ أنّ للاقتران نقطة صغرى محلّية إذا كانت $a > 0$.

32 تحدّ: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُمثل بيانيًّا منحنى الاقتران $f'(x)$.



33 تحدّ: إذا كان الاقتران $y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11$ ، حيث $p > 0$؛ فأجد مجموعة قِيَم p التي يكون عندها للاقتران نقطتان حرجتان.

الدرس 4

تطبيقات عملية على الاشتقاق
Applications of Differentiation

فكرة الدرس حلّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

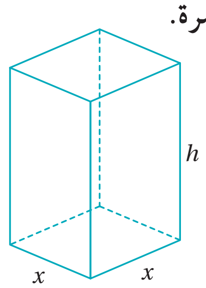
مسألة اليوم وجد باحث زراعي أنّ عدد حبّات البرتقال التي تنتجها كلّ شجرة في أحد بساتين غور الأردن، يعتمد على كثافة الأشجار المزروعة. إذا علمتُ أنّ عدد الأشجار في البستان n، وأنّ كلّ شجرة تنتج $900-9n$ برتقالة؛ فأجد أكبر عدد من أشجار البرتقال التي يُمكن زراعتها في البستان للحصول على أكبر عائد.

تعلّمتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد النقاط الحرجة للاقتران، وتصنيفها باستعمال المشتقّة. وأستطيع الآن توظيف هذه المفاهيم في تطبيقات حياتية متنوّعة، مثل: تحديد أكبر ربح ممكن، أو إيجاد أقل كمّية من المواد اللازمة لصنع الأشياء. ويُمكن تلخيص الإجراءات التي نحتاج إليها لحلّ مسائل عملية تتطلّب إيجاد قيمة عظمى أو صغرى في الخطوات الآتية:

1. أرسمُ مخطّطًا يُمثّل المسألة.
2. أكتبُ اقترانًا يُمثّل الكمّية المراد حسابها، بحيث يربط الاقتران المتغيّرات ببعضها.
3. أستعملُ الشروط الواردة في المسألة لكتابة الاقتران بدلالة متغيّر واحد.
4. أجد القيمة الحرجة باستعمال الاشتقاق، وأُحدّد نوعها.
5. أجد المطلوب من المسألة.

مثال 1

يُصمّم مهندس سلّة بلاستيكية على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومفتوح من الأعلى. إذا كان حجم السلّة $40000\ \text{cm}^3$؛ فأجد أبعادها التي تجعل كمّية البلاستيك المستعملة في تصنيعها أقلّ ما يُمكن، مقربًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1: أرسم مخطّطًا لمتوازي أضلاع قاعدته مربعة الشكل، ثم أكتب اقترانًا يُمثّل المِساحة الكلّية لسطح السلّة.

أفرض أنّ طول ضلع القاعدة المربّعة x وارتفاع السلّة h، إذن: الاقتران الذي يُمثّل المِساحة الكلّية لسطح السلّة مستثنيًا مِساحة القاعدة العلوية:

$$A = x^2 + 4xh$$

الخطوة 2: أكتبُ الاقتران الذي يُمثّل المِساحة الكلّية؛ بدلالة متغيّر واحد.

أستعمل حجم السلة المعطى في المسألة، لأجد العلاقة بين الارتفاع وطول ضلع القاعدة.

$$V = l \times w \times h$$ صيغة حجم متوازي المستطيلات

$$40000 = x^2 h$$ بتعويض $V = 40000,\ l = x,\ w = x$

$$h = \frac{40000}{x^2}$$ بكتابة h موضوعًا للقانون

إذن: العلاقة بين الارتفاع وطول ضلع القاعدة:

$$h = \frac{40000}{x^2}$$

ولكتابة الاقتران الذي يُمثّل مِساحة السطح الكلّية بدلالة x، أُعوّض $h = \frac{40000}{x^2}$ في الاقتران.

$$A = x^2 + 4xh$$ اقتران المِساحة السطحية للسلّة

$$= x^2 + 4x\left(\frac{40000}{x^2}\right)$$ بتعويض $h = \frac{40000}{x^2}$

$$= x^2 + \frac{160000}{x}$$ بالتبسيط

إذن: الاقتران الذي يُمثّل مِساحة السطح الكلّية بدلالة المتغيّر x :

$$A = x^2 + \frac{160000}{x}$$

الخطوة 3: أشتقّ الاقتران، ثم أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{160000}{x^2}$$ مشتقّة اقتران المِساحة

$$2x - \frac{160000}{x^2} = 0$$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$$2x^3 = 160000$$ بضرب طرفَي المعادلة في x^2

$$x = \sqrt[3]{80000}$$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$x \approx 43.1$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: القيمة الحرجة لاقتران المِساحة $x = 43.1$. ولتحديد نوعها؛ أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 + \frac{320000}{x^3}$$

أُفكّر

ما علاقة المِساحة الكلّية لسطح السلة، بكمّية المواد المستعملة في تصنيعها؟

أتعلّم

يُمكن كتابة معادلة المِساحة الكلّية للسطحِ؛ بدلالة المتغيّر h أيضًا.

وبما أنّ المشتقّة الثانية لاقتران المِساحة موجبة لِقِيَم x جميعها حيث $x > 0$، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة صغرى.

الخطوة 4 : أجد قيمة h المناظرة لقيمة x الحرجة.

أُعوّض قيمة x في الارتفاع:

$$h = \frac{40000}{x^2}$$ الارتفاع بدلالة طول ضلع القاعدة

$$= \frac{40000}{(43.1)^2}$$ بتعويض $x = 43.1$

$$\approx 21.5$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: أقل كمّية من البلاستك يُمكن استعمالها في تصنيع السلّة، تنتج عندما يكون طول ضلع قاعدتها 43.1 cm، وارتفاعها 21.5 cm

أتحقّق من فهمي

يُريد مصنع تصميم علب كرتونية؛ لتغليف البضائع على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربّعة الشكل وحجمه $1000\ cm^3$. أجد أبعاد العلبة بحيث تكون كمّية الكرتون المستعملة في صنعها أقلّ ما يُمكن.

من التطبيقات الحياتية على الاشتقاق، تحديد السرعة الأمثل لوسائل النقل والأكثر اقتصادًا في الوقود في أثناء السفر.

مثال 2

تُمثّل المعادلة $R = 30 + \frac{x^3}{14400}$ تكلفة تشغيل شاحنة بالدينار في الساعة، حيث x سرعة الشاحنة (km/h).

1 **أجد الاقتران الذي يُمثّل تكلفة قيادة الشاحنة مسافة 200 km بدلالة x.**

أجد الزمن اللازم لقطع مسافة 200 km بدلالة x.

$$t = \frac{d}{v}$$ قانون السرعة

$$t = \frac{200}{x}$$ بتعويض $d = 200, v = x$

أفكّر

كيف حُكِم على أنّ المشتقّة الثانية لاقتران المِساحة موجبة عندما $x > 0$، من دون اللجوء إلى التعويض لتحديد الإشارة؟

تُفضّل شركات الشحن تغليف المنتجات في صناديق على شكل متوازي مستطيلات؛ لأنّ تكلفتها منخفضة، وتأخذ مِساحة أقلّ في التخزين.

أتذكّر

t : time, d : distance, v : velocity

أفرض أنّ C التكلفة الكلّية للرحلة؛ لذا، فإنّ $C = R \times t$، ثمّ أُعوّض $t = \frac{200}{x}$ في الاقتران.

$$C = R \times t$$ معادلة التكلفة الكلّية للرحلة

$$= (30 + \frac{x^3}{14400}) \times \frac{200}{x}$$ بتعويض $t = \frac{200}{x}, R = 30 + \frac{x^3}{14400}$

$$= \frac{6000}{x} + \frac{x^2}{72}$$ بالتبسيط

إذن: الاقتران الذي يُمثّل تكلفة قيادة الشاحنة مسافة 200 km بدلالة x (سرعة الشاحنة):

$$C = \frac{6000}{x} + \frac{x^2}{72}$$

2 **أجد سرعة الشاحنة الأكثر اقتصادًا للوقود في أثناء الرحلة.**

أشتقّ الاقتران، ثم أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

$$\frac{dC}{dx} = \frac{-6000}{x^2} + \frac{x}{36}$$ مشتقّة اقتران التكلفة

$$\frac{-6000}{x^2} + \frac{x}{36} = 0$$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$$\frac{6000}{x^2} = \frac{x}{36}$$ بإعادة ترتيب المعادلة

$$x^3 = 216000$$ خاصّية الضرب التبادلي

$$x = \sqrt[3]{216000}$$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$x = 60$$ بالتبسيط

إذن: القيمة الحرجة لاقتران التكلفة $x = 60$ ، ولتحديد نوعها أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{12000}{x^3} + \frac{1}{36}$$

وبما أنّ المشتقّة الثانية لاقتران التكلفة موجبة لِقِيَم x الموجبة جميعها، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة صغرى.

إذن: سرعة الشاحنة الأكثر اقتصادًا للوقود في أثناء الرحلة 60 km/h

تزداد نسبة استهلاك الوقود بزيادة سرعة السيّارة عن 100 km في الساعة، فكلّما زادت سرعة السيّارة على تلك السرعة 10 km تزداد نسبة استهلاك الوقود بمعدل 10%؛ بسبب مقاومة السيّارة للهواء.

أتحقّق من فهمي

تُمثّل المعادلة $R = 8 + \frac{x^3}{2000}$ تكلفة تشغيل سيارة نقل سياحية بالدينار في الساعة، حيث x سرعة السيّارة km/h.

a) أجد الاقتران الذي يُمثّل تكلفة قيادة السيّارة مسافة 100 km بدلالة x.

b) أجد سرعة السيّارة الأكثر اقتصادًا في الوقود في أثناء الرحلة.

يُعدّ المثالان السابقان تطبيقًا حياتيًّا على القيمة الصغرى، وسأتعرّف في هذا المثال أحد تطبيقات القيمة العظمى.

مثال 3

كان الهدف الأساسي لاختراع الحواسيب حلّ المعادلات الرياضية المعقّدة، وكانت النسخ الأوّلية منها بحجم غرفة كاملة.

وجد خبير تسويق أنّه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد؛ فإنّ سعر الحاسوب الواحد بالدينار يجب أن يكون $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تُعطى بالاقتران $C(x) = 3000 + 20x$؛ فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.

الخطوة 1: أكتب اقترانًا يُمثّل ربح الشركة عند بيع صفقة تحتوي x من الأجهزة.

إذا كان سعر بيع الجهاز الواحد s؛ فإنّ سعر بيع x من الأجهزة يُمثّل بالاقتران الآتي:

$$R(x) = x \cdot s(x)$$ اقتران سعر بيع x من الأجهزة

$$= x(1000 - x)$$ بتعويض $s(x) = 1000 - x$

$$= 1000x - x^2$$ بالتبسيط

ولإيجاد اقتران الربح لبيع x من الأجهزة، أطرحُ اقتران التكلفة من اقتران سعر البيع.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$ اقتران الربح

$$= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$$ بتعويض $R(x) = 1000x - x^2$، $C(x) = 3000 + 20x$

$$= -x^2 + 980x - 3000$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أشتقّ اقتران الربح، ثم أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

$$P'(x) = -2x + 980$$ مشتقّة اقتران الربح

$$-2x + 980 = 0$$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$$-2x = -980$$ بطرح 980 من الطرفين

$$x = 490$$ بقسمة الطرفين على -2

إذن: القيمة الحرجة لاقتران الربح $x = 490$، ولتحديد نوعها أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$P''(x) = -2$$

وبما أنّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x الموجبة جميعها، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة عظمى.

إذن: أكبر ربح يُمكن أن تحصل عليه الشركة، هو عند إنتاج 490 جهاز حاسوب.

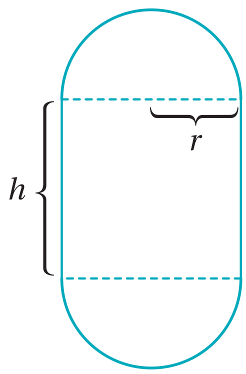
أتحقّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنّه لبيع x ثلاجة من نوع جديد؛ فإنّ سعر الثلاجة الواحدة بالدينار يجب أن يكون $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الثلاجات المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الثلاجات تُعطى بالاقتران $C(x) = 2250 + 18x$؛ فأجد عدد الثلاجات التي يجب إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.

يُمكن توظيف المشتقّات؛ لإيجاد أكبر مساحة ممكنة لمنطقة ما، وذلك بإيجاد القيمة العظمى لاقتران المِساحة الذي يُمثّل المنطقة.

مثال 4

سلك طوله 100 cm يُراد ثنيه لإحاطة الشكل المجاور، المكوّن من مستطيل طوله h cm وعرضه $2r$ cm، ونصفَي دائرة نصف قطر كل منهما r cm في أعلى المستطيل وأسفله. أجد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها.



الخطوة 1: أكتب اقترانًا يُمثّل مِساحة المنطقة المغلقة.

بما أنّ المنطقة مكوّنة من نصفَي دائرة ومستطيل؛ فإنّ الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المنطقة:

$$A = \pi r^2 + 2rh$$

الخطوة 2: أكتب اقتران المساحة بدلالة متغيّر واحد باستعمال المحيط.

$$100 = 2\pi r + 2h \quad \text{محيط المنطقة}$$

$$h = 50 - \pi r \quad \text{بكتابة } h \text{ موضوعًا للقانون}$$

ولكتابة الاقتران الذي يُمثّل المِساحة بدلالة r، أُعوّض $h = 50-\pi r$ فيه.

$$A = \pi r^2 + 2rh \quad \text{اقتران مِساحة المنطقة}$$

$$= \pi r^2 + 2r\,(50-\pi r) \quad \text{بتعويض } h = 50 - \pi r$$

$$= 100r - \pi r^2 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتذكّر

مِساحة الدائرة: $A = \pi r^2$، حيث r نصف قطر الدائرة.

مِساحة المستطيل: $A = l \times w$؛ حيث l: طول المستطيل، وw: عرض المستطيل.

أُفكّر

لماذا استُثنيَ عرض المنطقة المستطيلة من المحيط؟

الخطوة 3: أشتقّ اقتران المِساحة، ثمّ أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

$$\frac{dA}{dr} = 100 - 2\pi r$$ مشتقّة اقتران المساحة

$$100 - 2\pi r = 0$$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$$-2\pi r = -100$$ بطرح 100 من الطرفين

$$r = \frac{50}{\pi}$$ بقسمة الطرفين على -2π

إذن: القيمة الحرجة لاقتران المِساحة $r = \frac{50}{\pi}$، ولتحديد نوعها أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -2\pi$$

وبما أنّ المشــتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x الموجبة جميعها، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة عظمى.

ولإيجاد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها؛ أُعوّض $r = \frac{50}{\pi}$ في اقتران المِساحة:

$$A = 100r - \pi r^2$$ اقتران المساحة بدلالة r

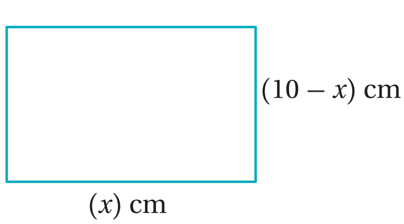
$$= 100\left(\frac{50}{\pi}\right) - \pi\left(\frac{50}{\pi}\right)^2$$ بتعويض $r = \frac{50}{\pi}$

$$= \frac{5000}{\pi} - \frac{2500}{\pi} = \frac{2500}{\pi}$$ بالتبسيط

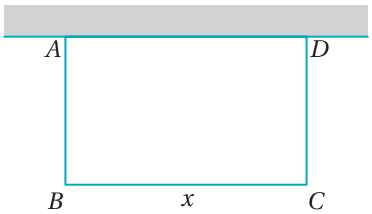
إذن: أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها $\frac{2500}{\pi}\ \text{cm}^2$

أتحقّق من فهمي

سلك طوله 20 cm يُراد ثنيه لإحاطة المستطيل المجاور. أجد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها.



أتدرّب وأحلّ المسائل



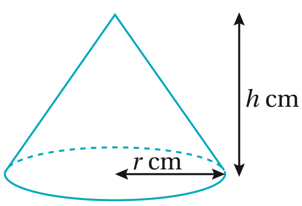
يُمثّل الشكل المجاور مخطّطًا لحديقة منزلية بُنيت مقابل جدار حجري، إذا كان محيط الحديقة دون الجدار يساوي 300 m؛ فأُجيب عمّا يأتي:

1 أجد المقدار الجبري الذي يُمثّل طول الضلع AB بدلالة x.

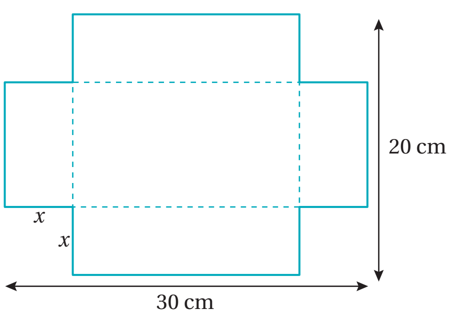
2 أجد اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.

3 أجد أبعاد الحديقة بحيث تكون مِساحة الحديقة أكبر ما يُمكن.

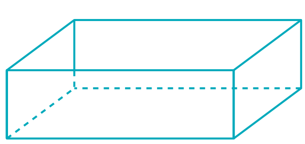
4 **نِجارة:** يُريد نجّار بناء سقف خشبي لحظيرة حيوانات. إذا كان سقف الحظيرة على شكل مستطيل محيطه 54 m؛ فأجد أكبر مِساحة ممكنة لسطح الحظيرة.



5 يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا طول نصف قطر قاعدته r cm، وارتفاعه h cm، حيث: $r + h = 60$، أجد قيمتَي r و h اللتين يكون عندهما حجم المخروط أكبر ما يُمكن.

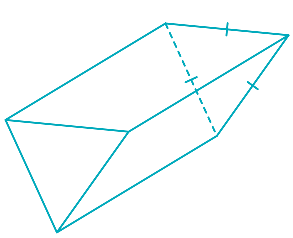


قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها 30 cm، وعرضها 20 cm. قُصّ من جوانبها الأربعة مربّعات متطابقة طول ضلع كل منها x cm كما في الشكل المجاور، ثمّ ثُنيت الورقة لتشكيل علبة.

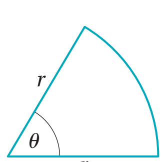


6 أجد الاقتران الذي يُمثّل حجم العلبة بدلالة x.

7 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكن.



8 قالب لصنع الكعك على شكل منشور قاعدته مثلّث متطابق الأضلاع كما في الشكل المجاور وحجمه $500\ cm^3$. أجد أبعاد المنشور بحيث تكون المواد المستعملة في تصنيعه أقلّ ما يُمكن.

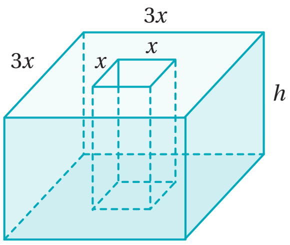


يُبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه 200 cm

9 أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة القطاع الدائري بدلالة r.

10 أجد أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.

تُريد إحدى شركات الشوكولاته إطلاق منتج جديد في علب من الورق المقوى. إذا كانت العلبة على شكل متوازي مستطيلات وفي داخلها فراغ على شكل متوازي مستطيلات أيضًا كما في الشكل المجاور، إذا كان حجم العلبة $2000\ cm^3$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

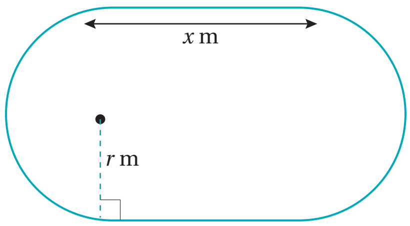


11 الاقتران الممثّل للمِساحة الكلّية الخارجية لسطح العلبة.

12 قيمة x التي تجعل المِساحة الكلّية الخارجية لسطح العلبة أقلّ ما يُمكن.

مهارات التفكير العليا

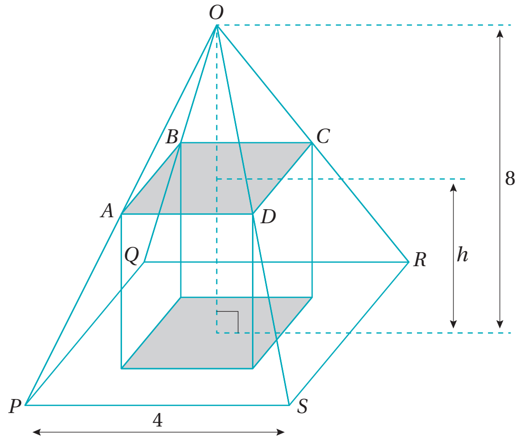
تبرير: مضمار سباق مكوّن من جزأين مستقيمين طول كل منهما x مترًا، وجزأين على شكل نصف دائرة طول نصف قطر كل منهما r مترًا كما في الشكل المجاور. وكان محيط المضمار $400\ m$؛ فأُجيب عمّا يأتي:



13 أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المنطقة المغلقة داخل المضمار بدلالة r.

14 أُثبتُ أنّه عندما يكون لِمساحة المنطقة المغلقة داخل المضمار قيمة حرجة؛ فإنّ المضمار لا يحتوي على أجزاء مستقيمة، ثم أُبيّن نوع القيمة الحرجة. أُبرّر إجابتي.

تحدّ: يُبيّن الشكل المجاور متوازي مستطيلات ارتفاعه h وحدة، موضوعًا داخل هرم رباعي منتظم ارتفاعه 8 وحدات، وطول ضلع قاعدته $4\ cm$ بحيث تنطبق قاعدة متوازي المستطيلات على قاعدة الهرم، وتقع رؤوسه A,B,C,D على أحرف الهرم $\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}, \overline{OS}$ على التوالي. إذا علمتُ أنّ الهرم $OPQRS$ والهرم $OABCD$ متشابهان، فأجد كلًّا ممّا يأتي:



15 طول AD بدلالة h.

16 الاقتران الذي يُمثّل حجم متوازي المستطيلات بدلالة h.

17 قيمة h التي تجعل حجم متوازي المستطيلات أكبر ما يُمكن.

أختار رمز الإجابة الصحيحة، لكل ممّا يأتي:

1 إذا كان $y = 2x^4 - 5x^3 + 2$؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $y = 8x^3 - 5x^2 + 2$ b) $y = 4x^4 - 15x^2 + 2$

c) $y = 8x^3 - 15x + 2$ d) $y = 8x^3 - 15x^2$

2 إذا كان $f(x) = (x-3)^2$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x - 3$ b) $x - 6$

c) $2x - 6$ d) $2x + 9$

3 إذا كان $y = \frac{2x^4 + 9x^2}{3x}$؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{2x^4}{3} + 6x$ b) $2x^2 + 3$

c) $2x + 3$ d) $8x^3 + 18x$

4 إذا كان $f(x) = 12x^{\frac{2}{3}}$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ b) $8x^{\frac{-1}{3}}$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ d) $4x^{\frac{-1}{3}}$

5 إذا كان $f(x) = (1-x)^3$؛ فإنّ $f''(x)$ تساوي:

a) $-3(1-x)^2$ b) $3(1-x)^2$

c) $6(1-x)$ d) $-3(1-x)$

إذا كان $f(x) = (x + \frac{4}{x})^2$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

6 $f'(x)$.

7 معادلة المماس عند النقطة $(4, 25)$.

إذا كان الاقتران $y = 2x + \frac{8}{x}$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

8 $\frac{dy}{dx}$.

9 ميل مماس المنحنى عند نقاط تقاطعه مع المستقيم $y = 10$.

10 إذا كان الاقتران $y = (3x + a)(x - 1)$، حيث a ثابت؛ فأجد بدلالة a إحداثيّات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي a.

إذا كان الاقتران $y = x^2 (x^2 - p)$، حيث $p > 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

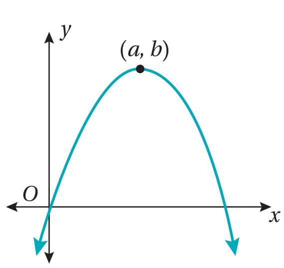
11 مشتقّة الاقتران بدلالة p.

12 النقاط الحرجة للاقتران؛ إذا كانت $p = 8$، ثمّ أُحدّد نوعها.

13 أُمثّل الاقتران بيانيًّا عندما $p = 8$.

14 إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + bx + c$، حيث a و b و c ثوابت؛ فأُثبت أنّه توجد نقطتان حرجتان للاقتران، إذا كانت $a^2 > 3b$. أُبرّر إجابتي.

15 يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي $f(x)$. إذا كان للاقتران نقطة عظمى محلّية عند (a, b)؛ فأُمثّل منحنى الاقتران $f'(x)$ بيانيًّا.



أجد القيم الحرجة لكلّ من الاقترانات الآتية، ثمّ أُحدّد نوعها:

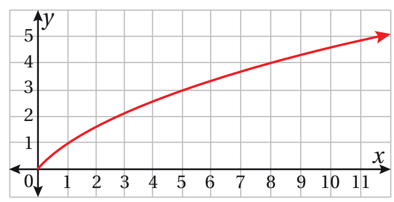
16 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 58$

17 $f(x) = x^3 - 12x^2$

18 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - 5$

19 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 45x + 8$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x^{\frac{3}{2}}$



20 أجد معادلة المماس عندما $y = 4$.

21 أجد معادلة المماس عند النقطة التي يكون عندها ميل المنحنى يساوي $\frac{1}{6}$.

إذا كان الاقتران $y = 10 - x^2$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

22 معادلة المماس عند النقطة $(2, 6)$.

23 مِساحة المثلث المكوّن من المماس والمحورين الإحداثيّين.

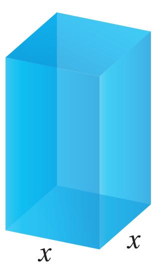
24 يُمثّل المستقيم $x = 2y + 3$ العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $y = x(x + 4)$ عند النقطة P. أجد أحداثيّات النقطة P.

25 إذا كان الضغط والحجم لغاز مُعيّن يرتبطان بالعلاقة: $pV = 1200$، حيث p الضغط وV الحجم، ويزداد الضغط مع الزمن (t) بالثواني وفقًا للعلاقة $p = 10 + 0.4\sqrt{t}$. أجد معدّل تغيّر حجم الغاز بالنسبة إلى الزمن عندما $t = 100$

26 بالون كروي الشكل يزداد حجمه بمعدّل $36\ cm^3/s$. أجد معدّل تغيّر مِساحة سطح البالون عندما يكون حجمه $2000\ cm^3$.

27 يُمثّل الاقتران $s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2$ المسافة (بالمتر)، التي تقطعها سيّارة بعد t ثانية من انطلاقها. أجد سرعة السيّارة بعد 10 ثوان من بدء حركتها.

28 صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها $x\ cm$ كما في الشكل المجاور.



إذا كان مجموع أطوال أحرف الصندوق يساوي $144\ cm$؛ فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

تدريب على الاختبارات الدولية

29 إذا كان $f(x) = x^{\pi}$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{22}{7}$ b) $\frac{7}{22}$

c) $\frac{22}{7}x^{\frac{15}{7}}$ d) $\frac{7}{22}x^{\frac{15}{7}}$

30 يوجد للاقتران $y = 4x^2 + 6x + 3$ قيمة حرجة عندما x تساوي:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

31 يوجد للاقتران $y = -5x^2 + 7x + 4$ قيمة عظمى محلّية عندما x تساوي:

a) 0.7 b) 1 c) 0 d) −0.7

الوحدة 4

الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

Logarithmic and Exponential Functions

ما أهمّية هذه الوحدة؟

تُستعمل الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية، في نمذجة الكثير من التطبيقات الحياتية بصورة رياضية تُسهّل فهمها. فمثلًا، تُستعمل بعض أنواع الاقترانات الأُسّية لوصف العلاقة بين عدد الخلايا البكتيرية والزمن. وسأتعرّف في هذه الوحدة هذين النوعين من الاقترانات، وتطبيقاتهما الحياتية الكثيرة.

تعلّمت سابقًا:

- قوانين الأُسس النسبية.
- حلّ المعادلة الأُسّية.
- إيجاد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد.
- تمثيل الاقترانات بيانيًّا.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- الاقتران الأُسّي وخصائصه وتمثيله البياني.
- الاقتران اللوغاريتمي وخصائصه وتمثيله البياني.
- قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ المعادلة الأُسّية واللوغاريتمية؛ باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (23 و 24) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الاقترانات الأُسّية

Exponential Functions

فكرة الدرس تعرّف خصائص الاقتران الأُسّي وتمثيله بيانيًّا.

المصطلحات الاقتران الأُسّي، اقتران النمو الأُسّي، عامل النمو، اقتران الاضمحلال الأُسّي، عامل الاضمحلال، الأساس الطبيعي، الاقتران الأُسّي الطبيعي.

مسألة اليوم الهيدرا حيوان صغير يعيش في الماء العذب، ويُمكنه مضاعفة عدده كلّ يومين. إذا افترضتُ أنّ خزّانًا من الماء في مختبر يحوي في البداية 60 حيوان هيدرا، فأجد عدد حيوانات الهيدرا في الخزّان بعد 8 أيام.

الاقتران الأُسّي

يسمّى الاقتران الذي يتضمن أسًّا متغيرًا لأساس ثابت أكبر من الصفر **اقترانًا أسيًّا** (exponential function)، ومن أمثلته:

$f(x) = 3^x$, $f(x) = 5(\frac{1}{4})^x$, $f(x) = (0.6)^x + 12$

يسمّى الاقتران الأسي الذي على الصورة: $f(x) = b^x$ حيث $b > 0$، و $b \neq 1$ **الاقتران الأسي الرئيس**، ويمكنني تمثيله بإنشاء جدول قِيَم، ثم تعيين الأزواج المرتّبة الناتجة من الجدول في المستوى الإحداثي، والتوصيل بينها بمنحنى متّصل.

مثال 1

إذا كان $f(x) = 2^x$، فأُجيب عمّا يأتي:

1 أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

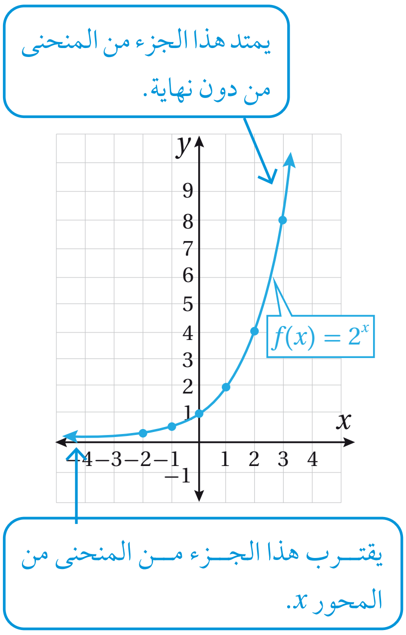
x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x, y)	$(-2, \frac{1}{4})$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$

أتذكّر

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن الأزواج المرتّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متّصل، كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ أنّ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه الفترة $(0, \infty)$، ويوجد للاقتران خط تقارب أُفقي وهو المحور x.

أتذكّر

خط التقارب خط مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران ولكن لا يمسّه ولا يقطعه.

2 **أجد المقطع x والمقطع y.**

بما أنّ 2^x موجبة دائمًا؛ فإنّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x لأنّ $y > 0$ دائمًا.

المقطع y للاقتران هو 1، عندما $x = 0$

3 **هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟**

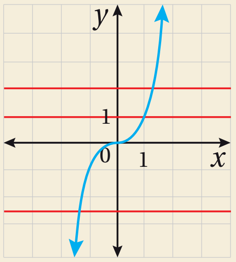
الاقتران $f(x)$ متزايد؛ لأنّه كلّما ازدادت قِيَم x؛ فإنّ قِيَم y تزداد.

4 **هل $f(x)$ اقتران واحد لواحد؟**

نعم، $f(x)$ اقتران واحد لواحد ويُمكن التحقّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأُفقي.

أتذكّر

يُسمّى الاقتران الذي يرتبط كلّ عنصر في مداه، بعنصر واحد فقط في مجاله اقتران واحد لواحد، ويُمكِن التحقُّق من ذلك عن طريق اختبار الخط الأفقي؛ إذ لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة واحدة.



أتحقّق من فهمي **إذا كان $f(x) = 3^x$، فأُجيب عمّا يأتي:**

a) أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطع x والمقطع y.

c) هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

d) هل $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟

أُلاحظ من المثال السابق أنّ الاقتران $f(x) = 2^x$ اقتران متزايد، مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أُفقي هو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبشكل عام، فإنّ أيّ اقتران أُسّي رئيس على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ له الخصائص ذاتها.

والآن، سأتعلّم في المثال الآتي التمثيل البياني للاقتران الأُسّي الرئيس على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$، وأستكشفُ خصائصه.

مثال 2

إذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$، فأُجيب عمّا يأتي:

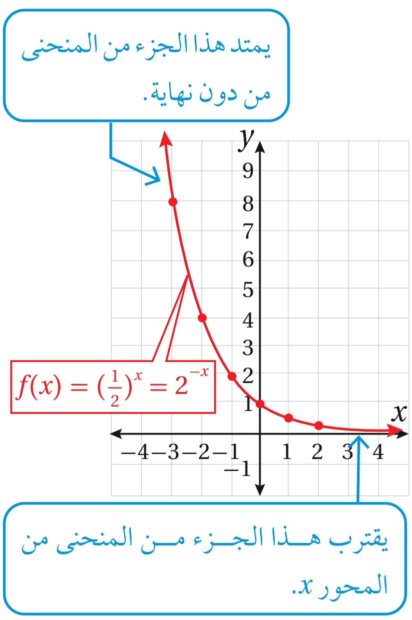
1 أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(1, \frac{1}{2})$	$(2, \frac{1}{4})$

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن الأزواج المرتّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متّصل، كما في الشكل المجاور.



ألاحظ أنّ مجال هذا الاقتران مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ مداه الفترة $(0, \infty)$، ويوجد للاقتران خط تقارب أُفقي وهو المحور x.

> **أتذكّر**
>
> $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

> **أتعلّم**
>
> يُمكن كتابة الاقتران $f(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ على الصورة $f(x) = b^{-x}$ لأنّ $\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$

2 أجد المقطع x والمقطع y.

بما أنّ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ موجبة دائمًا؛ فإنّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x لأنّ $y > 0$ دائمًا.

المقطع y للاقتران هو 1، عندما $x = 0$

3 هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متناقص؛ لأنّه كلّما ازدادت قِيَم x؛ فإنّ قِيَم y تتناقص.

4 هل $f(x)$ اقتران واحد لواحد؟

نعم، $f(x)$ اقتران واحد لواحد ويُمكن التحقّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأُفقي.

أتحقّق من فهمي

إذا كان $f(x) = (\frac{1}{3})^x$، فأُجيب عمّا يأتي:

a) أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطع x والمقطع y.

c) هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

d) هل $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟

أتعلّم

اقترانات القوّة مثل $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ ليست اقترانات أُسّية؛ لأنّ المتغيّر موجود في الأساس وليس في الأُسّ.

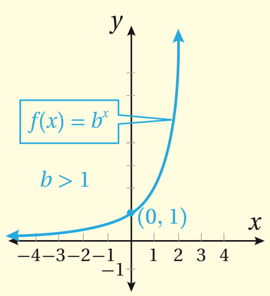
أُلاحظ من المثال السابق أنّ الاقتران $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ متناقص، ومجاله مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أُفقي هو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبشكل عام، فإنّ أيّ اقتران أُسّي رئيس على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ له الخصائص ذاتها.

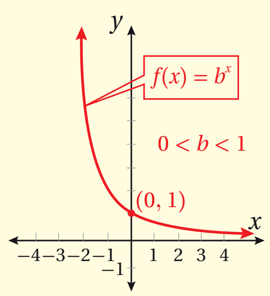
ملخّص المفهوم

خصائص الاقتران الأُسّي الرئيس

التمثيل البياني للاقتران الأُسّي الرئيس $f(x) = b^x$ حيث b عدد حقيقي و $b > 0$, $b \neq 1$ له الخصائص الآتية:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي الفترة $(0, \infty)$.
- يكون الاقتران متزايدًا إذا كانت $b > 1$
- يكون الاقتران متناقصًا إذا كانت $0 < b < 1$
- للاقتران خط تقارب أُفقي هو المحور x.
- يقطع الاقتران الأُسّي الرئيس المحور y في نقطة واحدة هي $(0, 1)$، ولا يقطع المحور x.
- اقتران واحد لواحد.





أتعلّم

لماذا يشترط أن تكون $b > 0$؟

تمثيل الاقترانات الأُسّية بيانيًّا

يُمكِن تطبيق التحويلات الهندسية (الانسحاب، والتمدُّد، والانعكاس) على الاقتران الأُسّي الرئيس: $f(x) = b^x$؛ لإيجاد اقترانات أُسّية أُخرى، مثل:

$f(x) = -3b^{x-2} + 1$ $\quad$ $f(x) = 4b^x - 5$ $\quad$ $f(x) = b^x + 3$

التحويلات الهندسية للاقترانات الأُسِّية

مفهوم أساسي

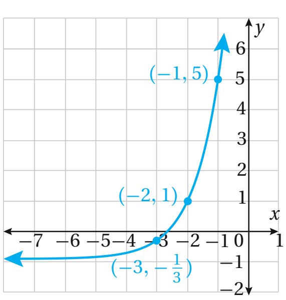
فـي الاقتران الأُسِّـي الذي صورتـه: $f(x) = ab^{x-h} + k$، حيـث: a, b, h, k أعداد حقيقية، و $a \neq 0$، و $b > 0$، و $b \neq 1$، فإنَّ:

- يشير h إلى انسـحاب أفقي لمنحنى الاقتران الأُسِّـي الرئيس بمقدار h وحدة إلى اليمين إذا كان $h > 0$، وانسحاب أفقي إلى اليسار بمقدار $|h|$ وحدة إذا كان $h < 0$.
- يشير k إلى انسحاب رأسي لمنحنى الاقتران الأُسِّي الرئيس بمقدار k وحدة إلى الأعلى إذا كان $k > 0$، وانسحاب رأسي إلى الأسفل بمقدار $|k|$ وحدة إذا كان $k < 0$.
- يشير a إلى شكل المنحنى واتجاهه على النحو الآتي:
  - إذا كان $a < 0$، فإنَّ منحنى الاقتران الأُسِّي الرئيس يُعكَس حول المحور x.
  - إذا كان $|a| > 1$، فإنَّ منحنى الاقتران الأُسِّـي الرئيس يتوسَّـع رأسـيًّا بمعامل يساوي $|a|$.
  - إذا كان $0 < |a| < 1$، فإنَّ منحنى الاقتران الأُسِّـي الرئيس يضيق رأسيًّا بمعامل يساوي $|a|$.

لتمثيل الاقتران: $f(x) = ab^{x-h} + k$ بيانيًّا، أبدأ برسـم منحنى الاقتران الرئيس: $y = b^x$، ثم أُجري التحويلات على المنحنى؛ لينتج التمثيل البياني للاقتران $f(x)$.

مثال 3

أُمثِّل الاقتران $f(x) = 2(3^{x+2}) - 1$ بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:



لتمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، أَتَّبِع الخطوات الآتية:

- أُمثِّل منحنى الاقتران الرئيس: $y = 3^x$ باستعمال مجموعة من النقاط.
- أَضـرِب الإحداثي y لـكل نقطة في 2؛ لتوسـيع منحنى الاقتران رأسيًّا.
- أطرح 2 من الإحداثي x لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- أطرح 1 من الإحداثي y لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدة إلى الأسفل.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $f(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

إذن، مجـال الاقتـران هو مجموعة الأعـداد الحقيقيـة، ومـداه $\{y \mid y > -1\}$؛ أيِ الفترة $(-1, \infty)$.

أتعلَّم

لرسـم منحنى الاقتران: $f(x) = b^x$، أُعيِّن النقاط الآتيـة: $(0, 1), (1, b), (-1, \frac{1}{b})$، ثـم أرسـم منحنى يصل بينها، مراعيًا خصائص منحنى الاقتران الأُسِّي.

أتحقّق من فهمي

أمثل كلًّا من الاقترانات الآتية وأجد مجاله ومداه:

a) $f(x) = 4(2^x) + 12$

b) $h(x) = 6(\frac{1}{3})^{2-x}$

للاقترانات الأُسّية الكثير من التطبيقات الحياتية، مثل حساب كمّية المادّة المتبقّية من الموادّ المشعّة.

مثال 4 : من الحياة

موادّ مشعّة: تُمثّل المعادلة $N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$ الكمية المتبقّية N بالغرامات من عيّنة كتلتها 1 g من الراديوم 226 حيث t الزمن بالسنوات.

معلومة

الراديوم 226 عنصر كيميائي مشع يُرمز له بالرمز Ra ورقمه الذري 88، لونه أبيض نقي تقريبًا، وهو من المعادن القلوية الترابية ولكنّه يتأكسد بسهولة عند تعرّضه للهواء، فيصبح أسود اللون.

1 أجد كمّية الراديوم 226 المتبقية بعد 3240 سنة.

$N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$	المعادلة الأصلية
$N(3240) = (\frac{1}{2})^{\frac{3240}{1620}}$	بالتعويض $t = 3240$
$= (\frac{1}{2})^2$	بتبسيط القوّة
$= 0.25$	بالتبسيط

إذن: بعد 3240 سنة، يبقى من كمّية الراديوم 0.25 g

2 بعد كم سنة يبقى من كمّية الراديوم 0.125 g؟

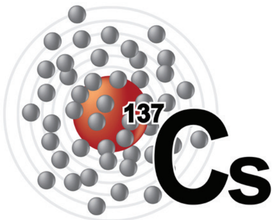
يُمكنني إيجاد عدد السنوات اللازمة ليبقى من الراديوم 0.125 عن طريق حلّ المعادلات الأُسّية.

$N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$	المعادلة الأصلية
$0.125 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$	بتعويض $N(t) = 0.125$
$\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$	$0.125 = \frac{1}{8}$
$(\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$	الأساسان متساويان
$3 = \frac{t}{1620}$	بمساواة الأُسس
$t = 4860$	بحلّ المعادلة

إذن: يبقى 0.125 g من كمّية الراديوم بعد 4860 سنة.

أتحقّق من فهمي

تُمثّل المعادلــة $N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{30}}$ الكمّية المتبقّية N بالغرامات من عينة كتلتها 1 g من السيزيوم 137 حيث t الزمن بالسنوات.



a) أجد كمّية السيزيوم 137 المتبقّية بعد 30 سنة.

b) بعد كم سنة يبقى من كمّية السيزيوم 0.25 g

اقتران النمو الأُسّي

عندما تزداد كمّية بشــكل أُســي؛ فإنّها تزداد بنســبة مئوية ثابتة خلال فترات زمنية متســاوية. ولإيجاد مقدار هذه الكمّية التي ازدادت بعد t من الزمن؛ يُمكن استعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

ويُســمّى هذا الاقتران **اقتران النمو الأُســي** (exponential growth function) حيث t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النســبة المئوية للنمو في فترات زمنية محدّدة. ويُسمّى أساس العبارة الأُسّية $(1 + r)$ **عامل النمو** (growth factor).

أتعلّم

اقتــران النمــو الأُســي $A(t) = a(1 + r)^t$ أحد صــور الاقتران الأُســي $f(x) = ab^x$، حيــث اســتعمل المقدار $1 + r$ بدلًا من b، و t بدلًا من x. ولقانــون النمو الأُســي الكثيــر مــن التطبيقات الحياتيــة، منهــا النمــو السكّاني.

مفهوم أساسي — اقتران النمو الأُسّي

بالكلمات: اقتران النمو الأُسّي هو كلّ اقتران أُسّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

$$A(t) = \overset{\text{الكمية الابتدائية}}{a}\ \underbrace{(1 + \overset{\text{النسبة المئوية للنمو}}{r})}_{\text{عامل النمو}}{}^{\overset{\text{الفترة الزمنية للنمو}}{t}}$$

مثال 5 : من الحياة

سـكّان: بلغ عدد سـكّان المملكة الأردنية الهاشمية في عام 2020، تقريبًا 10.8 مليون نسمة، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني 2.6% سنويًا تقريبًا؛ فأُجيب عما يأتي:

المصدر: دائرة الإحصاءات العامة

1 أكتبُ اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد سكان المملكة بالمليون نسمة بعد t سنة منذ العام 2020

$A(t) = a(1 + r)^t$ اقتران النمو الأُسّي

$A(t) = 10.8\ (1 + 0.026)^t$ بتعويض $a = 10.8,\ r = 0.026$

$A(t) = 10.8\ (1.026)^t$ بالتبسيط

إذن: اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد سكان المملكة بعد t من السنوات $A(t)=10.8(1.026)^t$

2 أجد عدد سكان المملكة التقريبي في عام 2030

بما أنّ عدد سكان المملكة الابتدائي (عندما $t = 0$) يرتبط بالعام 2020، فإنّه لإيجاد عدد سكان المملكة في عام 2030، أُعوّض $t = 10$ لأنّه يُمثّل الفرق الزمني بين العامين 2020 و 2030.

$$A(t) = 10.8\,(1.026)^t$$ اقتران النمو السكّاني

$$A(10) = 10.8\,(1.026)^{10}$$ بتعويض $t = 10$

$$\approx 13.96$$ باستعمال الآلة الحاسبة

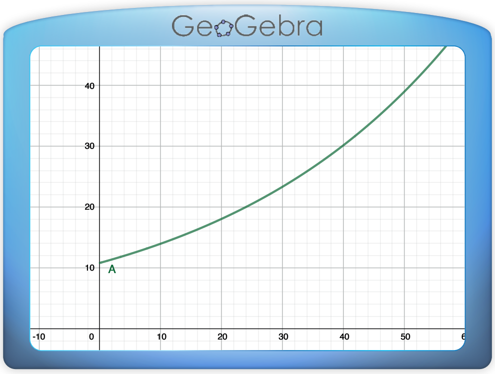
إذن: من المتوقّع أن يكون عدد سكان الأردن في عام 2030 تقريبًا، 13.96 مليون نسمة.

3 أُمثّل اقتران النمو الأُسّي بيانيًّا.

يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقتران الأُسّي بيانيًّا؛ وذلك بإدخال الصيغة الآتية في شريط الإدخال:

$$A(t) = 10.8(1.026)^t\,,\ t \geq 0$$

ثم النقر على زرّ (Enter).



أتعلّم

لا يُمكن للزمن أن يكون سالبًا؛ لذا، يُضاف شرط $t \geq 0$ ، عند تمثيل اقتران النمو في برمجية جيوجيبرا.

أتحقّق من فهمي

بلغ عدد سكّان لواء الموقّر في عام 2015 تقريبًا 84370 نسمة، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني فيه 2.4% سنويًّا، فأجيب عمّا يأتي:

a) أكتبُ اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد سكان لواء الموقر بعد t سنة منذ العام 2015

b) أجد عدد سكان اللواء التقريبي في عام 2050

c) أُمثّل اقتران النمو الأُسّي بيانيًّا.

اقتران الاضمحلال الأُسّي

وكما في النمو الأُسّي؛ فإنّه يُمكنني تمثيل النقص في كمّية ما، بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية؛ باستعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1-r)^t$$

ويُسمّى هذا الاقتران **اقتران الاضمحلال الأُسّي** (exponential decay function) حيث t الفترة الزمنية، وa الكمّية الابتدائية، وr النسبة المئوية للاضمحلال في فترة زمنية محدّدة، ويُسمّى أساس العبارة الأُسّية $(1-r)$ **عامل الاضمحلال** (decay factor).

مفهوم أساسي

اقتران الاضمحلال الأُسّي

بالكلمات: اقتران الاضمحلال الأُسّـي اقتران أُسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

الكمية الابتدائية

النسبة المئوية للاضمحلال

$$A(t) = a\,\underbrace{(1 - r)}_{\text{عامل الاضمحلال}}{}^{t}$$

الفترة الزمنية للاضمحلال

مثال 6 : من الحياة

معلومة

يُعـدّ تلـوّث المـاء أحد الأسباب الرئيسة التي تؤدي إلى موت الكائنات البحرية فـي المصـادر المائيـة. ومـن الكائنـات البحرية التـي تتأثّر بدرجـة كبيرة بتلـوّث المياه: الأسـماك والطيور والنوارس البحرية والدلافين.

تلوّث: أُجريت دراسـة على إحدى البحيرات؛ لتحديد مدى تأثير التلوّث على عدد الأسـماك فيها، فوُجِدَ أنّ عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة.

1 **أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل عدد الأسماك في البحيرة بعد (t) سنة، علمًا بأنّ عدد الأسماك عند بدء الدراسة يساوي 12000 سمكة.**

اقتران الإضمحلال الأُسّي	$A(t) = a(1 - r)^t$
بتعويض $a = 12000,\ r = 0.2$	$A(t) = 12000\ (1 - 0.2)^t$
بالتبسيط	$A(t) = 12000\ (0.8)^t$

إذن: اقتران الاضمحلال الأُسّـي الذي يُعبّر عن عدد الأسماك في البحيرة بعد t من السنوات $A(t) = 12000(0.8)^t$

2 **أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد مرور 3 سنوات.**

اقتران اضمحلال عدد الأسماك	$A(t) = 12000\ (0.8)^t$
بتعويض $t = 3$	$A(3) = 12000\ (0.8)^3$
باستعمال الآلة الحاسبة	$= 6144$

إذن: يبقى في البحيرة 6144 سمكة بعد مرور 3 سنوات.

أتعلّم

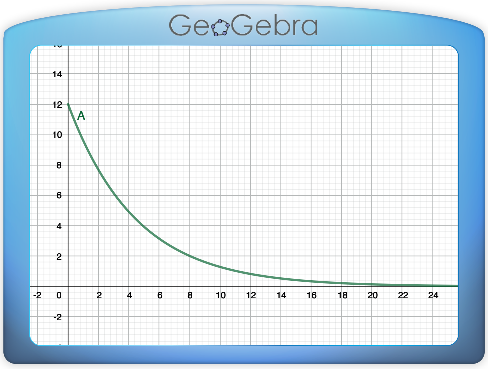
يُمكــن تمثيــل الاقتران $A(t)=12(0.8)^t$ بدلًا من $A(t)=12000(0.8)^t$ لتسهيل ملاحظة التغيّرات علــى شــكل المنحنى، مع ضــرورة الانتباه إلى ضرب أيّ قيمة ناتجة في 1000

3 **أُمثّل اقتران الاضمحلال بيانيًّا.**

يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقتران الأُسّي بيانيًّا؛ وذلك بإدخال الصيغة الآتية في شريط الإدخال:

$$A(t)=12000(0.8)^t\ ,\ t\geq 0$$

ثم النقر على زرّ (Enter).



أتحقّق من فهمي

سيّارة: **اشترى أحمد سيّارة تعمل على الشحن الكهربائي بمبلغ JD 25000. إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 10% سنويًّا؛ فأجيب عمّا يأتي:**

a) **أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيارة بعد (t) سنة.**

b) **أجد ثمن السيّارة بعد 5 سنوات.**

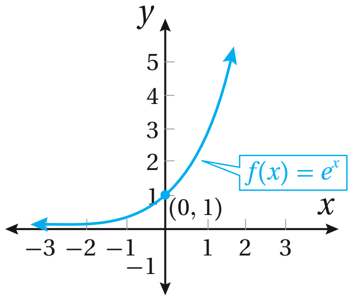
c) **أُمثّل اقتران الاضمحلال بيانيًّا.**

الاقتران الأُسّي الطبيعي

في الكثير من التطبيقات الحياتية، يكون الاختيار الأمثل للأساس في الاقترانات الأُسّيّة هو العدد غير النسبي $e=2.718281828......$

يُسمّى العدد e **الأساس الطبيعي** (natural base) أو العدد النيبيري، ويُسمّى الاقتران $f(x)=e^x$ **الاقتران الأُسّي الطبيعي** (natural exponential function).

إنّ التمثيل البياني للاقتران الأُسّي الطبيعي، له خصائص التمثيل البياني نفسها للاقتران $f(x)=a^x$



مثال 7 : من الحياة

ذباب الفاكهة: وجدت باحثة بعد دراسة أجرتها على تكاثر ذباب الفاكهة، أنّ العدد التقريبي للذباب يُمكن تمثيله بالاقتران $Q(t) = 20e^{0.03t}$، حيث Q عدد الذباب بعد t ساعة.

معلومة

يُمكن لأنثى ذبابة الفاكهة أن تضع 100 بيضة يوميًّا، وتفقس هذه البيضات لتُصبح يرقات في أقلّ من 24 ساعة.

1 **أجد العدد الابتدائي لذبابات الفاكهة عند بدأ الدراسة.**

$Q(t) = 20e^{0.03t}$ الاقتران الأصلي

$Q(0) = 20e^{0.03(0)}$ بتعويض $t = 0$

$= 20e^{0}$ أضرب

$= 20(1)$ $e^0 = 1$

$= 20$ أُبسّط

إذن: العدد الابتدائي للذباب عند بدء الدراسة 20 ذبابة.

2 **أجد عدد ذبابات الفاكهة بعد مرور 72 ساعة من بدء الدراسة، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.**

$Q(t) = 20e^{0.03t}$ الاقتران الأصلي

$Q(72) = 20e^{0.03(72)}$ بتعويض $t = 72$

$= 20e^{2.16}$ أضربُ

≈ 173 أستعملُ الآلة الحاسبة

إذن: عدد ذبابات الفاكهة بعد مرور 72 ساعة 173 ذبابة تقريبًا.

أتعلّم

لإيجاد القيمة $20e^{2.16}$ باستعمال الآلة الحاسبة؛ أضغطُ على الأزرار:

2 0 SHIFT e^x

2 . 1 6

= 173.42275

أتحقّق من فهمي

يُمثّل الاقتران $P(t) = 34.706e^{0.0097t}$ عدد سكان مدينة بالمليون نسمة، بعد t سنة منذ المسح الإحصائي للمدينة في عام 2015

a) أجد عدد سكان المدينة في عام 2015

b) أجد عدد سكّان المدينة في عام 2030؛ مقرّبًا إجابتي إلى أقرب مليون.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أُمثّل كلًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

1) $y = 4(3^x)$
2) $y = 10(4^{-x})$
3) $y = 4(\frac{3}{5})^{x+4} + 3$
4) $y = 3(\frac{2}{5})^{x-3} - 6$
5) $y = 3e^{x+2}$
6) $y = 8e^{-2x} - 3$

معلومة

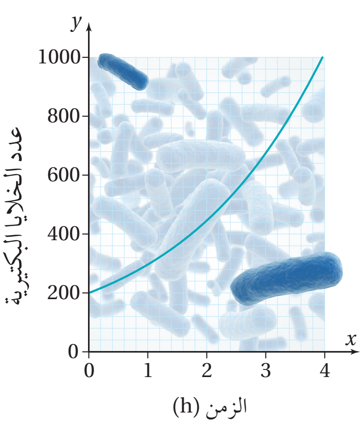
ينبت التين الخانق من الأعلى نحو الأسفل؛ فالبذرة التي يتخلّص منها العصفور تستقر فوق الأشجار الاستوائية العالية، لتبدأ نموها نحو الأسفل وتصل إلى سطح الأرض وتتغلغل فيه؛ فتخنق الشجرة الحاملة لها إلى أن تقتلها تمامًا وتأخذ مكانها.

أشجار: يُمثّل الاقتران $f(x) = 12(2)^{\frac{x}{5}}$ طول شجرة من التين الخانق $f(x)$ بالأقدام بعد x سنة.

7) أجد خط التقارب الأُفقي للاقتران $f(x)$، ثم أُمثّله بيانيًّا، علمًا بأنّ $x = 0$ تُمثّل الوقت الحاضر.

8) أجد المقطع y للاقتران $f(x)$ وأصف مدلوله.

يُبيّن التمثيل البياني المجاور العلاقة بين عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية والزمن بالساعات.



9) أجد عدد الخلايا البكتيرية في البداية.

10) أجد النسبة المئوية للنمو في كلّ ساعة.

11) أكتبُ اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد h ساعة.

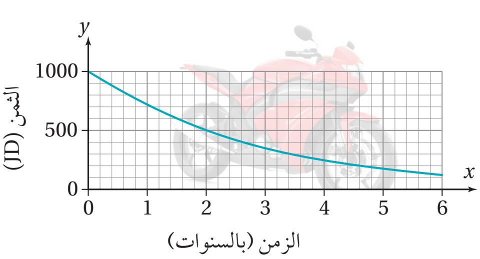
12) بعد كم ساعة يُصبح عدد الخلايا البكتيرية 3 أضعاف عددها الأصلي.

يمرّ منحنى الاقتران $y = k(2^x) + c$ بالنقطتين $(0, 10)$، $(-1, 7)$.

13) أجد قيمة كلّ من الثابتين k وc.

14) أجد قيمة y عندما $x = 3$

يُظهر التمثيل البياني المجاور العلاقة بين ثمن درّاجة نارية بالدينار والزمن بالسنوات.



15) أجد ثمن الدرّاجة بالدينار عند شرائها.

16) أجد النسبة المئوية للاضمحلال في ثمن الدرّاجة.

17) أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل ثمن الدرّاجة بعد مرور (t) سنة.

يُقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى الهيكتوباسكال (hPa)، ويكون الضغط الجوي عند سطح البحر $1000\ hPa$، ويتناقص بنسبة 12% لكلّ كيلومتر ارتفاعًا عن سطح البحر.

18 أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي للضغط الجوي عند ارتفاع (h) كيلو متر.

19 أُمثّل اقتران الاضمحلال بيانيًّا.

معلومة

عندما تتعرّض أسماك المياه المالحة للمياه العذبة يُمكن أن تنفجر خلاياها، أمّا السلمون فلديه بعض الخصائص الفسيولوجية والسلوكية المدهشة التي تُمكّنه من العيش في كلا البيئتين.

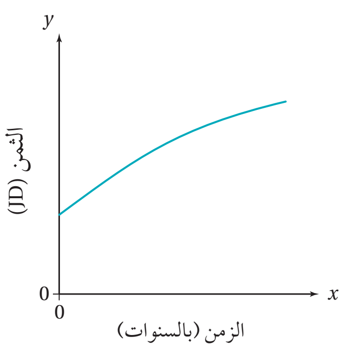
يُمثل الاقتران $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة.

20 أجد عدد أسماك السلمون في النهر بعد 3 سنوات.

21 أُمثّل الاقتران $P(t)$ بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجيبرا.

22 **طب:** حقن الطبيب مريضًا بمادّة علاجية، فإذا كان تركيز هذه المادة في جسم المريض يقلّ بنسبة 40% يوميًّا؛ فأكتبُ اقتران الاضمحلال الذي يُمثّل تناقص تركيز المادة العلاجية M بعد t يوم.

مهارات التفكير العليا



23 **أكتشفُ الخطأ:** تقول سميرة إنّ العلاقة بين ثمن عقار والزمن بالسنوات الممثّلة في الشكل المجاور، تُمثّل اقتران نمو أُسّي لأنّ ثمن العقار يزداد مع الزمن. هل هي على صواب؟ أُبرّر إجابتي.

24 **تحدّ:** إذا كانت $P = e^{2x}$، فأكتبُ كلًّا من المقادير الآتية بدلالة P:

e^{4x} | e^{2x+1} | e^{-x} | e^{-2x} | e^{3x} | e^{x}

25 **تبرير:** متى يقطع الاقتران الأُسّي محور x؟ أُبرّر إجابتي بتقديم مثال داعم.

26 **تحدّ:** أُحدّد العلاقة بين الاقترانين $f(x) = 4^{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{16}(4^x)$. أُبرّر إجابتي.

الدرس 2

الاقترانات اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

فكرة الدرس تعرّف خصائص الاقتران اللوغاريتمي وتمثيله بيانيًّا.

المصطلحات الاقتران اللوغاريتمي للأساس b، اللوغاريتم الاعتيادي، اقتران اللوغاريتم الطبيعي.

مسألة اليوم يُمثّل الاقتران $B(t) = 100e^{0.693t}$ عدد الخلايا البكتيرية في طبق بتري بعد t ساعة.

1 بعد كم ساعة يُصبح عدد الخلايا البكتيرية في طبق البتري 200 خلية؟

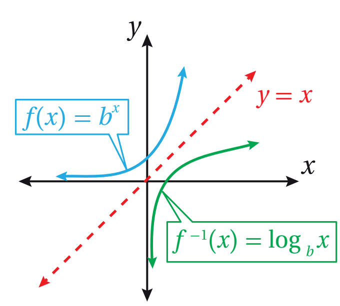
2 ما الاقتران العكسي للاقتران $B(t)$؟

الاقتران اللوغاريتمي

تعلّمتُ سابقًا أنّ أيّ اقتران يجتاز اختبار الخط الأُفقي يكون اقتران واحد لواحد، ويُمكنني إيجاد اقتران عكسي له؛ لذا، فإنّه يُمكنني إيجاد اقتران عكسي للاقتران الأُسّي الذي على الصورة $f(x) = b^x$.

يُسمّى الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي $f(x) = b^x$ **الاقتران اللوغاريتمي للأساس b** (logarithmic function with base b)، ويُرمز له بالرمز $g(x) = \log_b x$ ويُقرأ لوغاريتم x للأساس b.

إذن، إذا كان الاقتران: $f(x) = b^x$ حيث $b > 0, b \neq 1, x > 0$، فإنّ $f^{-1}(x) = \log_b x$، ويُبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للاقترانين معًا.



أتعلّم

أُلاحظ أنّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$

مفهوم أساسي العلاقة بين الصورتين الأُسّية واللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ فإنّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأسية
$\log_b x = y$	إذا وفقط إذا	$b^y = x$
الأساس b، الأُسّ y		الأساس b، الأُسّ y

ويُمكنني استعمال تعريف اللوغاريتمات؛ لكتابة معادلات لوغاريتمية بالصورة الأُسّية.

مثال 1

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

1) $\log_2 16 = 4$

$\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$

2) $\log_7 7 = 1$

$\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$

3) $\log_{10} (\frac{1}{1000}) = -3$

$\log_{10} (\frac{1}{1000}) = -3 \rightarrow (10)^{-3} = \frac{1}{1000}$

4) $\log_5 1 = 0$

$\log_5 1 = 0 \rightarrow 5^0 = 1$

أفكّر

لمـاذا يشـترط أن تكون $x > 0$؟

أتحقّق من فهمي

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

a) $\log_3 9 = 2$ b) $\log_5 5 = 1$ c) $\log_4 (\frac{1}{256}) = -4$ d) $\log_8 1 = 0$

يُمكنني اسـتعمال تعريـف اللوغاريتمات أيضًـا؛ للتحويل من الصورة الأُسّـية إلى الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

1) $12^2 = 144$

$12^2 = 144 \rightarrow \log_{12} 144 = 2$

2) $36^{\frac{1}{2}} = 6$

$36^{\frac{1}{2}} = 6 \rightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

3) $(3)^{-4} = \frac{1}{81}$

$(3)^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow \log_3 (\frac{1}{81}) = -4$

4) $34^0 = 1$

$34^0 = 1 \rightarrow \log_{34} 1 = 0$

أتعلّم

الصـورة اللوغاريتميـة $\log_b x = y$ والصـورة الأُسّية $b^y = x$ متكافئتان.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

a) $25^2 = 625$ b) $81^{\frac{1}{2}} = 9$ c) $(10)^{-4} = \frac{1}{10000}$ d) $19^0 = 1$

يُمكنني استنتاج – من العلاقة بين الصورتين الأُسّية واللوغاريتمية – أنّ اللوغاريتم هو أُسّ، وبما أنّه كذلك فإنّه يُمكنني إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية بسيطة باستعمال قوانين الأُسس.

مثال 3

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_2 8$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_2 8 = y$
الصيغة الأُسّية	$2^y = 8$
$8 = 2^3$	$2^y = 2^3$
بمساواة الأُسس	$y = 3$

إذن: فإنّ $\log_2 8 = 3$

2 $\log_7 \sqrt{7}$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_7 \sqrt{7} = y$
الصيغة الأُسّية	$7^y = \sqrt{7}$
$\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$	$7^y = 7^{\frac{1}{2}}$
بمساواة الأُسس	$y = \frac{1}{2}$

إذن: فإنّ $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

3 $\log_9 3$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_9 3 = y$
الصيغة الأُسّية	$9^y = 3$
$9 = 3^2$	$(3^2)^y = 3$
قانون قوّة القوّة	$3^{2y} = 3^1$
بمساواة الأُسس	$2y = 1$
بحلّ المعادلة	$y = \frac{1}{2}$

إذن: فإنّ $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

4 $\log_{10} 0.01$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_{10} 0.01 = y$
الصيغة الأُسّية	$10^y = 0.01$
$0.01 = \frac{1}{100}$	$10^y = \frac{1}{100}$
$\frac{1}{100} = 10^{-2}$	$10^y = 10^{-2}$
بمساواة الأُسس	$y = -2$

إذن: فإنّ $\log_{10} 0.01 = -2$

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_8 64$ b) $\log_{11} \sqrt{11}$ c) $\log_{25} 5$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$

يُمكنني استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات؛ من خلال ملاحظة الأمثلة السابقة.

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ فإنّ:

- $\log_b 1 = 0$ ‏ ‏ $b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ ‏ ‏ $b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ ‏ ‏ $b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ ‏ ‏ $\log_b x = \log_b x$

أتعلّم

$\log_b 0$ غير معرّف؛ لأنّ $b^x \neq 0$ لأيّ قيمة x.

مثال 4

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_3 81$

$\log_3 81 = \log_3 3^4$ ‏ ‏ $81 = 3^4$

$= 4$ ‏ ‏ $\log_b b^x = x$

2 $\log_{23} \sqrt{23}$

$\log_{23} \sqrt{23} = \log_{23} 23^{\frac{1}{2}}$ ‏ ‏ $\sqrt{23} = 23^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$ ‏ ‏ $\log_b b^x = x$

3 $\log_9 9$

$\log_9 9 = 1$ ‏ ‏ $\log_b b = 1$

4 $6^{\log_6 11}$

$6^{\log_6 11} = 11$ ‏ ‏ $b^{\log_b x} = x$

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

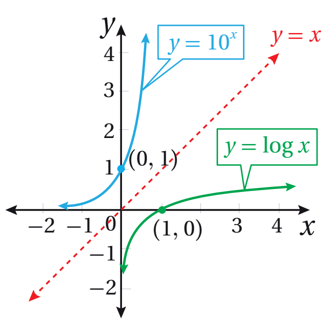
a) $\log_2 64$ b) $\log_{19} \sqrt{19}$ c) $\log_{18} 18$ d) $4^{\log_4 15}$

اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي

يُسمّى اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ **اللوغاريتم الاعتيادي** (common logarithm) ويُكتب عادة من دون أساس.

اقتران اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي $y = 10^x$، أي إنّ:

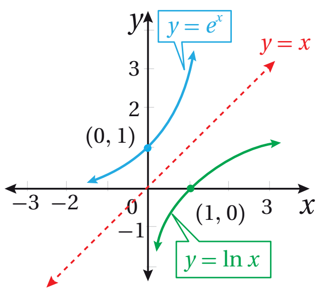
$y = \log x$ إذا وفقط إذا $10^y = x ,\ x > 0$



لغة الرياضيّات

يـدلّ الرمـز ln علـى اللوغاريتـم الطبيعـي، حيث الحرف l من كلمة logarithm والحرف n من كلمة natural.

أمـا اللوغاريتـم للأسـاس e أو $\log_e$ فيُسـمّى **اللوغاريتـم الطبيعـي** (natural logarithmic) ويُرمـز لـه ln.



اقتـران اللوغاريتـم الطبيعـي $y = \ln x$ هـو الاقتـران العكسـي للاقتـران الأُسّـي الطبيعـي $y = e^x$، أي إنّ:

$$y = \ln x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad e^y = x\,,\ x > 0$$

خصائـص اللوغاريتمـات صحيحـة أيضًـا للوغاريتـم الاعتيـادي واللوغاريتـم الطبيعـي، ويُمكـن اسـتعمالها لإيجـاد قيمـة كل منهمـا، ولكـن الآلـة الحاسـبة تحتـوي زرًّا خاصًّـا باللوغاريتـم الاعتيـادي هـو log وزرًّا خاصًّـا باللوغاريتـم الطبيعـي هـو ln ويُمكـن مـن خلالهمـا إيجـاد القيمـة التقريبيـة لـكل مـن اللوغاريتـم الاعتيـادي أو اللوغاريتـم الطبيعي، لأيّ عـدد حقيقـي موجـب.

مثال 5

أستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\log 5.3$

أستعملُ الآلة الحاسبة: log 5.3 = 0.7242758696

إذن: $\log 5.3 \approx 0.7$

2 $\log(8.2 \times 10^9)$

أستعملُ الآلة الحاسبة: log (8.2 × 10 $x^{\blacksquare}$ 9) = 9.913813852

إذن: $\log(8.2 \times 10^9) \approx 9.9$

3 $\ln 80$

أستعملُ الآلة الحاسبة: ln 80 = 4.382026635

إذن: $\ln 80 \approx 4.4$

أتعلّم

تحتـوي بعـض الآلات الحاسـبة الزرّ $\log_{\blacksquare}\square$ الـذي يُمكن مـن خلاله إيجـاد قيمـة اللوغاريتم لأيّ أسـاس b، حيـث $b > 0$

أتحقّق من فهمي

أستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

a) $\log 1200$ b) $\log(6.3 \times 10^5)$ c) $\ln 0.00025$

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيًّا

يُمكنني استعمال العلاقة العكسـية بين الاقتران الأُسّي والاقتران اللوغارتمي؛ لتمثيل منحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس $y = \log_b x$ بيانيًّا.

مثال 6

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعَيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

1 $f(x) = \log_2 x$

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

بما أنّ المعادلة $y = \log_2 x$ تُكافئ المعادلة $x = 2^y$، إذن: يُمكنني إيجاد الأزواج المرتّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمتغيّر y أولًا، ثمّ إيجاد قِيَم x المرتبطة بها عن طريق التعويض في المعادلة $x = 2^y$.

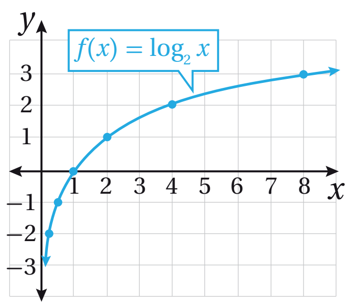
$x = 2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(\frac{1}{4}, -2)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(4, 2)$

1 أختار بعض قِيَم y

2 أجد قِيَم x المناظرة

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن الأزواج المرتّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متّصل، كما في الشكل المجاور.



أتعلّم

يُمكن أيضًا إنشاء جدول القِيَم باختيار قِيَم للمتغيّر x تتناسب مع الأساس b في الاقتران اللوغاريتمي الذي على الصورة $f(x) = \log_2 x$، ويسهُل من خلالها استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \log_2 x$ أنّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، ولا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y لأن $x > 0$ دائمًا.
- يوجد للاقتران خط تقارب رأسي وهو المحور y.
- الاقتران متزايد.

2 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

بما أنّ المعادلة $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ تُكافئ المعادلة $x = (\frac{1}{2})^y$، إذن: يُمكنني إيجاد الأزواج المرتّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمتغيّر y أولًا، ثمّ إيجاد قِيَم x المرتبطة بها من خلال التعويض في المعادلة $x = (\frac{1}{2})^y$.

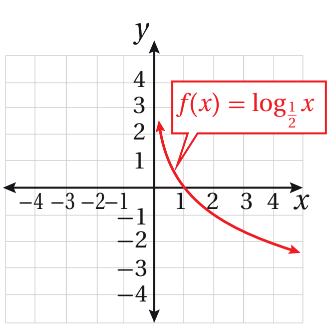
$x = (\frac{1}{2})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(4, -2)$	$(2, -1)$	$(1, 0)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{4}, 2)$

1 أختار قيمًا لـ y

2 أجد قِيَم x

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن الأزواج المرتّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متّصلٍ، كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ أنّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، ولا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y لأن $x > 0$ دائمًا.
- يوجد للاقتران خط تقارب رأسي وهو المحور y.
- الاقتران متناقص.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعَيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا.

a) $f(x) = \log_3 x$ **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

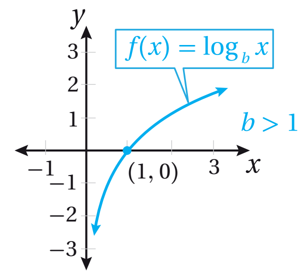
أُلاحظ من المثال الســابق أنّ الاقتران اللوغاريتمي الرئيس علــى الصورة $f(x)=\log_b x$، له مجموعة من الخصائص يُمكن تلخيصها كالآتي:

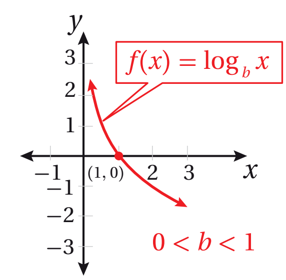
ملخّص المفهوم — خصائص الاقتران اللوغاريتمي الرئيس

التمثيـل البياني للاقتـران اللوغاريتمي الرئيس $f(x) = \log_b x$ حيـث b عدد حقيقي و $b > 0$, $b \neq 1$ له الخصائص الآتية:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- يكون الاقتران متزايدًا إذا كانت $b > 1$
- يكون الاقتران متناقصًا إذا كانت $0 < b < 1$
- للاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y.

يقطع الاقتران المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$، ولا يقطع المحور y.





يُمكِـن تطبيق التحويلات الهندسـية (الانسـحاب، والتمـدُّد، والانعكاس) علــى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس: $f(x) = \log_b x$؛ لإيجاد اقترانات لوغاريتمية أُخرى، مثل:

$f(x) = \log_b x + 2$ $\quad$ $f(x) = 3\log_b x - 5$ $\quad$ $f(x) = 5\log_b (x-3) + 4$

مفهوم أساسي — التحويلات الهندسية للاقترانات اللوغاريتمية

فـي الاقتران الـذي صورته: $f(x) = a \log_b (x-h) + k$، حيـث a, b, h, k : أعداد حقيقية، و $a \neq 0$، و $b > 0$، و $b \neq 1$، فإنَّ:

- يشـير h إلى انسحاب أفقي لمنحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس بمقدار h وحدة إلى اليمين إذا كان $h > 0$، وانسحاب أفقي إلى اليسار بمقدار $|h|$ وحدة إذا كان $h < 0$.

مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية للاقترانات اللوغاريتمية (تابع)

- يشير k إلى انسحاب رأسي لمنحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس بمقدار k وحدة إلى الأعلى إذا كان $k > 0$، وانسحاب رأسي إلى الأسفل بمقدار $|k|$ وحدة إذا كان $k < 0$.
- يشير a إلى شكل المنحنى واتجاهه على النحو الآتي:
  - إذا كان $a < 0$، فإنَّ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس يُعكَس حول المحور x.
  - إذا كان $|a| > 1$، فإنَّ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس يتوسَّع رأسيًّا بمعامل يساوي $|a|$.
  - إذا كان $0 < |a| < 1$، فإنَّ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس يضيق رأسيًّا بمعامل يساوي $|a|$.

لتمثيل الاقتران: $f(x) = a\log_b(x-h) + k$ بيانيًّا، أبدأ برسم منحنى الاقتران الرئيس: $y = \log_b x$، ثم أُجري التحويلات على المنحنى؛ لينتج التمثيل البياني للاقتران $f(x)$.

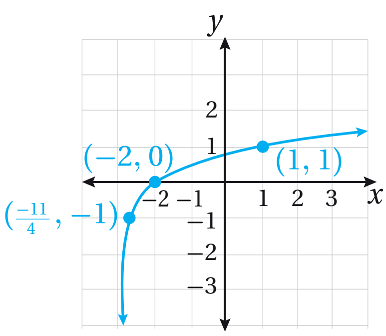
مثال 7

أُمثِّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأجد مجاله ومداه:

1 $f(x) = \log_4(x+3)$

لتمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، أَتّبع الخطوات الآتية:

- أُمثِّل منحنى الاقتران الرئيس: $y = \log_4 x$ باستعمال مجموعة من النقاط.
- أطرح 3 من الإحداثي x لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران 3 وحدات إلى اليسار.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $f(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



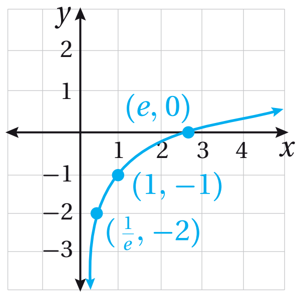
إذن، مجال الاقتران هو المجموعة $\{x \mid x > -3\}$، أو الفترة $(-3, \infty)$، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية.

أتعلّم

لرسم منحنى الاقتران: $f(x) = \log_b x$، أُعيِّن النقاط الآتية: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(\frac{1}{b}, -1)$، ثم أرسم منحنى يصل بينها، مراعيًا خصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي.

2 $f(x) = \ln x - 1$

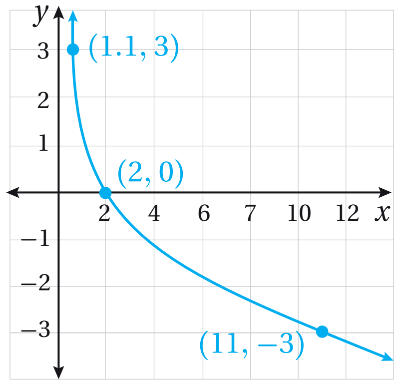
لتمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، أَتَّبع الخطوات الآتية:



- أُمثِّل منحنى الاقتران الرئيس: $y = \ln x$ باستعمال مجموعة من النقاط.
- أطرح 1 من الإحداثي y لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدة إلى الأسفل.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $f(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

إذن، مجال الاقتران هو المجموعة $\{x \mid x > 0\}$، أو الفترة $(0, \infty)$، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية.

3 $f(x) = -3 \log (x - 1)$



لتمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، أَتَّبع الخطوات الآتية:

- أُمثِّل منحنى الاقتران الرئيس: $y = \log(x)$ باستعمال مجموعة من النقاط.
- أَضرِب الإحداثي y لكل نقطة في -1؛ لعكس النقاط حول المحور x.
- أَضرِب الإحداثي y لكل نقطة في 3؛ لتوسيع منحنى الاقتران رأسيًّا.
- أُضيف 1 إلى الإحداثي x لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدة إلى اليمين.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $f(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

إذن، مجال الاقتران هو المجموعة $\{x \mid x > 1\}$، أو الفترة $(1, \infty)$، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية.

أتحقّق من فهمي

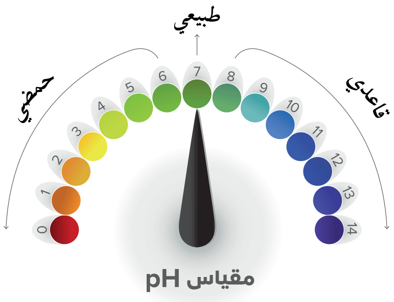
أُمثّل كلًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأجد مجاله ومداه:

a) $f(x) = \log_5 (x - 2)$ **b)** $f(x) = \ln (x + 3)$

c) $f(x) = \log x + 4$ **d)** $f(x) = \log_3 (x - 1) - 2$

للاقترانات اللوغاريتمية الكثير من التطبيقات الحياتية، منها تحديد الرقم الهيدروجيني للسوائل.

مثال 8 : من الحياة



علوم: يُعرف الرمز **pH** باسم الرقم الهيدروجيني، وهو القياس الذي يُحدّد إذا كان السائل قاعديًّا أم حمضيًّا أم متعادلًا، ويُمكن إيجاد الرقم الهيدروجيني **(pH)** للسوائل عن طريق المعادلة $\mathbf{pH = -\log [H^+]}$ حيث $\mathbf{[H^+]}$ تُمثّل تركيز أيونات الهيدروجين في المول لكل لتر **(mol/ L)**.

1 **أجد الرقم الهيدروجيني (pH) لسائل تنظيف منزلي تركيز أيونات الهيدروجين فيه $\mathbf{1.0 \times 10^{-11}}$ mol/L، ثم أحدّد إذا كان السائل حمضيًّا أم قاعديًّا.**

المعادلة الأصلية	$pH = -\log [H^+]$
بتعويض $[H^+] = 1.0 \times 10^{-11}$	$= -\log (1.0 \times 10^{-11})$
بالتبسيط	$= -\log (10^{-11})$
$\log_b b^x = x$	$= -(-11)$
بالضرب	$= 11$

إذن: الرقم الهيدروجيني (pH) لسائل التنظيف 11، ما يعني أنّه قاعدي.

2 **أجد الرقم الهيدروجيني (pH) لعيّنة مطر تركيز أيونات الهيدروجين فيها 0.0002 mol/L، ثم أُحدّد إذا كان الرقم الهيدروجيني للعينة أقلّ أم أكبر من الرقم الهيدروجيني للأمطار الطبيعية والذي يساوي 5.6 (أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة).**

المعادلة الأصلية	$pH = -\log [H^+]$
بتعويض $[H^+] = 0.0002$	$= -\log (0.0002)$
أستعملُ الآلة الحاسبة	≈ 3.7

إذن: الرقم الهيدروجيني (pH) لعيّنة المطر 3.7 تقريبًا، وهو أقلّ من الرقم الهيدروجيني للأمطار الطبيعية.

أتحقّق من فهمي

أجد الرقم الهيدروجيني (pH) لشامبو طبيعي تركيز أيونات الهيدروجين فيه $\mathbf{5.88 \times 10^{-7}}$ mol/ L، ثم أُحدّد إذا كان الشامبو حمضيًّا أم قاعديًّا. (أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).

معلومة

للأمطار الحمضية تأثيرات مدمّرة على النباتات والحيوانات المائية، ومعظمها تتكوّن بسبب مركّبات النيتروجين والكبريت الناتجة عن الأنشطة البشرية، والتي تتفاعل في الجو لتكوّن الأحماض.

أفكّر

تُظهِر الأبحاث أنّ مستويات الرقم الهيدروجيني القاعدية للشامبو تُطلق شحنات كهربائية سالبة، تؤدي إلى تلف البشرة وتكسّر ألياف الشعر. فهل الشامبو في سؤال أتحقّق من فهمي مناسب للشعر أم لا؟ أُبرّر إجابتي.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

1) $\log_4 1024 = 5$
2) $\log_3 729 = 6$
3) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
4) $\log_{25} 5 = 0.5$

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

5) $6^3 = 216$
6) $3^{-2} = \frac{1}{9}$
7) $5^4 = 625$
8) $2^{-3} = 0.125$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

9) $\log_2 256$
10) $\log_9 27$
11) $\log 0.1$
12) $\log_{\frac{7}{2}} 1$
13) $e^{\ln \frac{1}{2}}$
14) $\log_y \sqrt[3]{y}$
15) $\log(1.0\times10^{-6})$
16) $6^{\log_6 2.8}$

أستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

17) $\log \frac{1}{32}$
18) $\log(2.77\times10^{-4})$
19) $\ln 0.000062$
20) $\ln \pi$

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

21) $f(x) = \log_5 x$
22) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
23) $g(x) = \ln(x-1)$
24) $h(x) = 8 + 5\ln(2x+3)$
25) $f(x) = 3 - \log_4\left(\frac{x}{2} - 5\right)$
26) $w(x) = |\ln x|$

النسيان: في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في مدى تذكّر الطلبة للمعلومات، عُرّضت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادّة معيّنة، وأُعيد تعريضهم لاختبارات مكافئة لذلك الاختبار على فترات شهرية بعد ذلك. فوجد أنّ النسبة المئوية لمتوسّط علامات الطلبة $S(t)$، بعد t شهرًا تُعطى بالاقتران: $S(t) = 78 - 15\log(t+1)\ ,\ t \geq 0$

27) أجد النسبة المئوية لمتوسّط علامات الطلبة في بداية الدراسة.

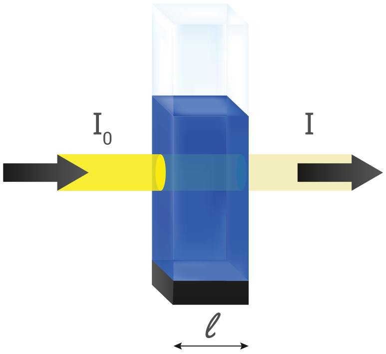
28) أجد النسبة المئوية لمتوسّط علامات الطلبة بعد 4 أشهر من بدء الدراسة.

معلومة

إنّ فهم المعلومات أولًا وتنظيمها؛ يُسهّل تذكّرها واستعادتها، ويُساعد أيضًا تدوين المعلومات عدّة مرّات على تغذية الدماغ وتدريبه على تذكّر المعلومات في ما بعد.

29 أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_a x$ يمرّ بالنقطة $(2, 2)$

30 أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_c x$ يمرّ بالنقطة $(\frac{1}{2}, -4)$



ضوء: تُمثّل المعادلة $A = 2 - \log 100T$ كمّية الضوء التي تمتصّها عيّنة من محلول A حيث T نسبة الضوء الذي ينتقل خلال المحلول (T نسبة شدّة الضوء قبل اختراق المحلول I_0 إلى شدّته بعد اختراق المحلول I).

31 إذا كانت نسبة الضوء التي انتقلت خلال محلول 72%؛ فأجد مقدار الضوء الذي امتصه المحلول.

32 إذا كانت كمّية الضوء التي امتصّها محلول 0.174؛ فأجد نسبة الضوء التي انتقلت خلاله.

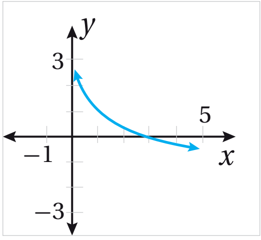
مهارات التفكير العليا

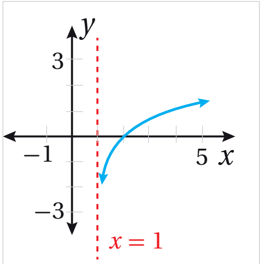
تبرير: أكتبُ بجانب كلّ اقتران ممّا يأتي، رمز التمثيل البياني المناسب له:

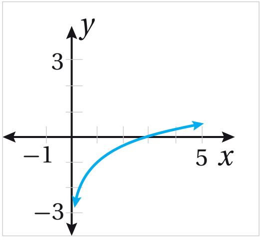
33 $f(x) = \log_3 (x-1)$

34 $g(x) = \log_3(x) - 1$

35 $h(x) = 1 - \log_3(x)$

a)


b)


c)


36 تحدّ: أجد المقطع x للاقتران $f(x) = \log(x-k)$، حيث k ثابت.

37 تبرير: من دون استعمال الآلة الحاسبة، أُبيّن أيّ القِيَم الآتية أكبر. أُبرّر إجابتي:

$\log_5 28 \quad , \quad \log_6 32 \quad , \quad \log_7 40$

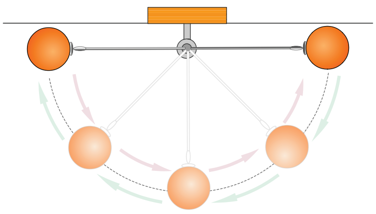
الدرس 3

قوانين اللوغاريتمات
Laws of Logarithms

فكرة الدرس
- تعرّف قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أُسّية ولوغاريتمية باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

المصطلحات خاصّية المساواة اللوغاريتمية، معادلة لوغاريتمية

مسألة اليوم تُمثّل المعادلة $T = 2L^n$ الزمن T بالثواني اللازم لتأرجح بندول 10 مرّات، حيث L طول البندول بالأمتار و n عدد ثابت. إذا علمتُ أنّ بندولًا طوله 0.25 m تلزمه 12 ثانية ليتأرجح 10 مرّات. فما قيمة الثابت n؟



قوانين اللوغاريتمات

تعلمتُ سابقًا قوانين الأسس، ووظّفتها في تبسيط مقادير أُسّية، وإيجاد قيمة مقادير عددية ومنها قوانين الضرب والقسمة وقوّة القوّة.

قانون ضرب القوى	قانون قسمة القوى	قانون قوة القوّة
$b^x \times b^y = b^{x+y}$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, b \neq 0$	$(b^x)^y = b^{xy}$

وبما أنّه توجد علاقة عكسية بين اللوغاريتمات والأُسس، فيُمكن اشتقاق قوانين لوغاريتمات مقابلة لهذه القوانين.

مفهوم أساسي **قوانين اللوغاريتمات**

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبة، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث $b \neq 1$ فإنّ:
- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- **قانون القوّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$

ويُمكنني إثبات صحّة قانون الضرب؛ باستعمال قوانين الأُسس كالآتي:

أفرضُ أنّ $m = \log_b x$ ومنه $b^m = x$

أفرضُ أنّ $n = \log_b y$ ومنه $b^n = y$

ومنه فإنّ $xy = b^m b^n = b^{m+n}$

وعند كتابة التعبير $xy = b^{m+n}$ بالصورة اللوغاريتمية؛ فإنّ الناتج:

$$\log_b xy = m + n$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad ✓$$

يُمكنني أيضًا إثبات صحّة قانونَي القسمة وقوة القوة؛ باستعمال قوانين الأُسس.

يُمكنني استعمال قوانين اللوغاريتمات في إيجاد قِيَم مقادير لوغاريتمية.

أتذكّر

الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$ والصورة الأُسّية $b^y = x$ متكافئتان.

مثال 1

إذا كان $\log_a 2 \approx 0.301$ و $\log_a 3 \approx 0.477$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1 $\log_a 6$

$\log_a 6 = \log_a (2 \times 3)$ $6 = 2 \times 3$

$= \log_a 2 + \log_a 3$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$\approx 0.301 + 0.477$ بتعويض $\log_a 2 \approx 0.301$, $\log_a 3 \approx 0.477$

≈ 0.778 بالجمع

2 $\log_a \frac{2}{3}$

$\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$\approx 0.301 - 0.477$ بتعويض $\log_a 2 \approx 0.301, \log_a 3 \approx 0.477$

≈ -0.176 بالطرح

3 $\log_a 81$

$\log_a 81 = \log_a (3^4)$ $81 = 3^4$

$= 4 \log_a 3$ قانون القوة في اللوغاريتمات

$\approx 4\,(0.477)$ بتعويض $\log_a 3 \approx 0.477$

≈ 1.908 بالضرب

4 $\log_a \frac{1}{4}$

$\log_a \frac{1}{4} = \log_a 1 - \log_a 4$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= 0 - \log_a 2^2$ $\log_a 1 = 0$, $4 = 2^2$

$= -2 \log_a 2$ بالطرح، وقانون القوة في اللوغاريتمات

$\approx -2(0.301)$ بتعويض $\log_a 2 \approx 0.301$

≈ -0.602

أُفكّر

هل يُمكن إيجاد $\log_a 5$ باستعمال معطيات المثال؟ أُبرّر إجابتي.

أُفكّر

هل يُمكن استعمال قانون القسمة لإيجاد ناتج $\frac{\log_a 3}{\log_a 2}$؟

أتحقّق من فهمي

إذا كان $\log_b 4 \approx 0.86$ و $\log_b 3 \approx 0.68$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 12$ b) $\log_b 9$ c) $\log_b 0.75$ d) $\log_b \frac{1}{3}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المطولة

أحتــاجُ في بعض الأحيان إلى إعادة كتابة عبــارات لوغاريتمية بصورة مطوّلة، ويُمكنني عمل ذلك باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

مثال 2

أكتـبُ كلّ عبـارة لوغاريتميـة ممّـا يأتـي بالصـورة المطوّلـة؛ علمًا بـأنّ المتغيّـرات جميعها تُمثّـل أعـدادًا حقيقيـة موجبة:

1 $\log_4 5x^3 y$

$\log_4 5x^3 y = \log_4 5 + \log_4 x^3 + \log_4 y$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_4 5 + 3\log_4 x + \log_4 y$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

2 $\ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7}, \ x > \frac{5}{3}$

$\ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7} = \ln \frac{(3x-5)^{\frac{1}{2}}}{7}$ صورة الأُسّ النسبي

$= \ln (3x-5)^{\frac{1}{2}} - \ln 7$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2} \ln (3x-5) - \ln 7$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

3 $\log_a \frac{x^2 y^5}{z^4}$

$\log_a \frac{x^2 y^5}{z^4} = \log_a x^2 y^5 - \log_a z^4$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_a x^2 + \log_a y^5 - \log_a z^4$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_a x + 5\log_a y - 4\log_a z$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

4 $\log_a \sqrt[3]{\dfrac{a^2 b}{c^5}}$

$\log_a \sqrt[3]{\dfrac{a^2 b}{c^5}} = \log_a \left(\dfrac{a^2 b}{c^5}\right)^{\frac{1}{3}}$	صورة الأُسّ النسبي
$= \dfrac{1}{3} \log_a \left(\dfrac{a^2 b}{c^5}\right)$	قانون القوّة في اللوغاريتمات
$= \dfrac{1}{3} (\log_a a^2 b - \log_a c^5)$	قانون القسمة في اللوغاريتمات
$= \dfrac{1}{3} (\log_a a^2 + \log_a b - \log_a c^5)$	قانون الضرب في اللوغاريتمات
$= \dfrac{1}{3} (2 \log_a a + \log_a b - 5 \log_a c)$	قانون القوّة في اللوغاريتمات
$= \dfrac{1}{3} (2 + \log_a b - 5 \log_a c)$	$\log_a a = 1$
$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \log_a b - \dfrac{5}{3} \log_a c$	خاصّية التوزيع

توسّع

أستعملُ برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقترانين $f(x) = \ln x - \ln(x-3)$ و $g(x) = \ln \dfrac{x}{x-3}$ في المستوى الإحداثي نفسه. هل أظهرت البرمجية المجال نفسه للاقترانين؟ أُبرّر إجابتي.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المطوّلة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

a) $\log_3 a^2 bc^3$

b) $\ln(a^2 \sqrt{a-1}), a > 1$

c) $\log \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3}\right), x > 1$

d) $\log_b \dfrac{x^2 y}{b^3}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المختصرة

تعلّمتُ في المثال السابق كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطوّلة، ولكن أحتاجُ أحيانًا إلى تحويل العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطوّلة إلى الصورة المختصرة، وهذا يعني كتابة العبارة اللوغارتمية على شكل لوغاريتم واحد.

مثال 3

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

1 $\frac{2}{3}\ln 8 - \ln(5^2 - 1)$

$$\frac{2}{3}\ln 8 - \ln(5^2-1) = \ln 8^{\frac{2}{3}} - \ln(25-1)$$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$$= \ln 4 - \ln 24$$ $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

$$= \ln\frac{4}{24}$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \ln\frac{1}{6}$$ بالتبسيط

$$= \ln 1 - \ln 6$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= -\ln 6$$ $\ln 1 = 0$

2 $\ln x^5 - 2\ln(xy)$

$$\ln x^5 - 2\ln(xy) = \ln x^5 - \ln(xy)^2$$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$$= \ln x^5 - \ln x^2 y^2$$ قوة حاصل الضرب

$$= \ln\frac{x^5}{x^2y^2}$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \ln\frac{x^3}{y^2}$$ بالتبسيط

3 $2\log x - \frac{1}{2}\log y + 3\log z$

$$2\log x - \frac{1}{2}\log y + 3\log z = \log x^2 - \log y^{\frac{1}{2}} + \log z^3$$ قانون القوة في اللوغاريتمات

$$= \log x^2 + \log z^3 - \log y^{\frac{1}{2}}$$ بإعادة تجميع الحدود

$$= \log x^2 z^3 - \log y^{\frac{1}{2}}$$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log\left(\frac{x^2z^3}{y^{\frac{1}{2}}}\right)$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log\left(\frac{x^2z^3}{\sqrt{y}}\right)$$ الصورة الجذرية

أتعلّم

أتجنّب هذه الأخطاء عند كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطوّلة أو الصورة المختصرة:

$$\log_b(M+N) = \log_b M + \log_b N$$
$$\log_b(M-N) = \log_b M - \log_b N$$
$$\log_b(M\cdot N) = \log_b M \cdot \log_b N$$
$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\log_b M}{\log_b N}$$
$$\frac{\log_b M}{\log_b N} = \log_b M - \log_b N$$
$$\log_b(MN^p) = p\log_b(MN)$$

أتعلّم

أعيد تجميع الحدود ذات المعاملات التي لها الاشارة نفسها.

4 $\frac{1}{2}(\log_5(x^2-y^2)-\log_5(x+y)),\ x>y$

$$\frac{1}{2}(\log_5(x^2-y^2)-\log_5(x+y))=\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$=\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}\right)$$ بتحليل الفرق بين مربّعين

$$=\frac{1}{2}\log_5(x-y)$$ بالاختصار

$$=\log_5(x-y)^{\frac{1}{2}}$$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$$=\log_5\sqrt{(x-y)}$$ الصورة الجذرية

أتحقّق من فهمي

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّـــا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

a) $\ln 25+\ln 4$

b) $\ln(3x+1)-\ln(3x^2-5x-2)$

c) $\frac{1}{2}(\log_2(a^2+ab)-\log_2 a)$

d) $\frac{1}{3}(\log_2 x+\log_2(x-4))$

تغيير الأساس

تعلّمتُ ســابقًا أنّ معظم الآلات الحاســبة تحتوي زرّين للوغاريتمــات هما log و ln . ولكن، كيف يُمكنني إيجاد $\log_4 7$ باستعمال هذا النوع من الآلات الحاسبة؟

يُمكنني حلّ هذه المشــكلة بتغيير الأساس غير المرغوب به (وهو في هذه الحالة الأساس 4) إلى حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسه.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b\neq 1, a\neq 1$ فإنّ:

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$$

مثال 4

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة إن لزم الأمر:

1 $\log_4 25$

$$\log_4 25 = \frac{\log 25}{\log 4}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\approx 2.32$$ أستعملُ الآلة الحاسبة

2 $\log_{\frac{1}{2}} 2$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{2}}$$ صيغة تغيير الأساس

$$= \frac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 2}$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \frac{\ln 2}{-\ln 2}$$ $\ln 1 = 0$

$$= -1$$ بالتبسيط

3 $\log_6 10$

$$\log_6 10 = \frac{\log 10}{\log 6}$$ صيغة تغيير الأساس

$$= \frac{1}{\log 6}$$ $\log 10 = 1$

$$\approx 1.29$$ أستعملُ الآلة الحاسبة

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة إن لزم الأمر:

a) $\log_2 89$

b) $\log_5 19$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

d) $\log_8 e^2$

أفكّر

هل سأحصل على النتيجة نفسها لو استعملت اللوغاريتم الطبيعي بدلًا من استعمال اللوغاريتم الاعتيادي في الفرع 1 من المثال؟ أُبرّر إجابتي.

أفكّر

هل يُمكنني حلّ الفرع 2 من المثال بطريقة أخرى؟ أُبرّر إجابتي.

المعادلات الأُسّية

تعلّمتُ سابقًا مفهوم المعادلة الأُسّية وهي معادلة تتضمّن قوى أُسسها متغيّرات، ويتطلّب حلّها كتابة طرفَي المعادلة بصورة قوّة للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أُسّي الطرفين وفق القاعدة الآتية:

بافتراض أنَّ $a > 0$، و $a \neq 1$، فإنَّ $a^x = a^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

فمثلًا، لحلّ المعادلة $2^{3x} = 64$ أتّبعُ الخطوات الآتية:

$2^{3x} = 64$	المعادلة الأصلية
$2^{3x} = 2^6$	الأساسان متساويان
$3x = 6$	بمساواة الأُسس
$x = 2$	بحلّ المعادلة

ولكن، في بعض المعادلات الأُسّية لا يُمكن كتابة طرفي المعادلة بصورة قوّة للأساس نفسه، مثل المعادلة: $4^x = 10$، وفي هذه الحالة يُمكن استعمال **خاصّية المساواة اللوغاريتمية** (property of logarithmic equality).

أتعلّم

نتجت خاصّية المساواة اللوغاريتمية من أنّ الاقتران اللوغاريتمي اقتران واحد لواحد؛ إذ يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله.

مفهوم أساسي

خاصّية المساواة اللوغاريتمية

إذا كانَ $b > 0$ حيث $b \neq 1, x > 0, y > 0$ فإنّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

ونتيجةً للخاصّية أعلاه؛ يُمكن حلّ المعادلات الأُسّية التي لا يُمكن كتابتها بصورة قوّة للأساس نفسه؛ بأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفَي المعادلة، ثم استعمال قانون القوّة في اللوغاريتمات.

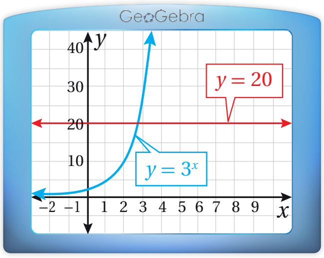
مثال 5

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

1 $3^x = 20$

الدعم البياني

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra)، لتمثيل المعادلتين $y = 3^x$، $y = 20$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



المعادلة الأصلية	$3^x = 20$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 3^x = \log 20$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$x \log 3 = \log 20$
بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 3$	$x = \dfrac{\log 20}{\log 3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 2.7268$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx 2.7268$

أتعلّم

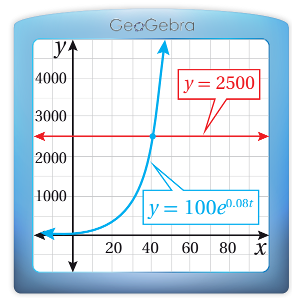
يمكن حل الفرع 1 من المثال 5، بأخذ $\log_3$ لطرفَي المعادلة، لتكون النتيجة $x = \log_3 20$، ويمكن إيجاد قيمة x بتغير الأساس إلى الصورة الآتية:

$$x = \frac{\log 20}{\log 3}$$

2 $\mathbf{100\, e^{0.08t} = 2500}$

الدعم البياني

أُمثّل المعادلتين $y = 100\, e^{0.08t}$ ، $y = 2500$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



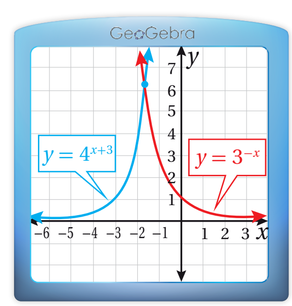
المعادلة الأصلية	$100\, e^{0.08t} = 2500$
بالقسمة على 100	$e^{0.08t} = 25$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln e^{0.08t} = \ln 25$
$\log_b b^x = x$	$0.08t = \ln 25$
بقسمة طرفَي المعادلة على 0.08	$t = \dfrac{\ln 25}{0.08}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$t \approx 40.2359$

إذن: حلّ المعادلة هو $t \approx 40.2359$

3 $\mathbf{4^{x+3} = 3^{-x}}$

الدعم البياني

أُمثّل المعادلتين $y = 4^{x+3}$، $y = 3^{-x}$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



المعادلة الأصلية $4^{x+3} = 3^{-x}$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين $\log 4^{x+3} = \log 3^{-x}$

قانون القوّة في اللوغاريتمات $(x+3)\log 4 = -x \log 3$

خاصّية التوزيع $x \log 4 + 3 \log 4 = -x \log 3$

بإعادة ترتيب المعادلة $x \log 4 + x \log 3 = -3 \log 4$

بإخراج x عاملًا مشتركًا $x(\log 4 + \log 3) = -3 \log 4$

بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 4 + \log 3$ $\quad x = \dfrac{-3 \log 4}{\log 4 + \log 3}$

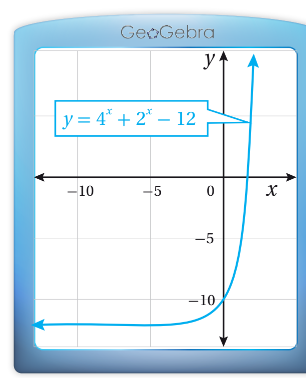
باستعمال الآلة الحاسبة $x \approx -1.6737$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx -1.6737$

4 $\quad \mathbf{4^x + 2^x - 12 = 0}$

الدعم البياني

أُمثّل المعادلة $y = 4^x + 2^x - 12$، في المســتوى الإحداثي، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنى المعادلة يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



المعادلة الأصلية $4^x + 2^x - 12 = 0$

$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ $\quad (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$

بافتراض أنّ $2^x = u$ $\quad u^2 + u - 12 = 0$

بالتحليل $(u+4)(u-3) = 0$

خاصّية الضرب الصفري $u = -4 \quad or \quad u = 3$

باستبدال 2^x بـ u $\quad 2^x = -4 \qquad 2^x = 3$

بمـــا أنّ 2^x دائمًا موجبة لأيّ قيمة x؛ فإنّه لا يُمكن حلّ المعادلة $2^x = -4$، وســيقتصر الحلّ على حلّ المعادلة $2^x = 3$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين $\log 2^x = \log 3$

قانون القوّة في اللوغاريتمات $x \log 2 = \log 3$

بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 2$ $\quad x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

باستعمال الآلة الحاسبة $x \approx 1.5850$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx 1.5850$

أتحقّق من فهمي

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $5^x = 8$

b) $4e^{2x} - 3 = 2$

c) $2^{x-1} = 3^{3x+2}$

d) $9^x + 3^x - 20 = 0$

المعادلات اللوغاريتمية

تُسمّى المعادلات التي تحوي متغيّرًا داخل تعبير لوغاريتمي **معادلة لوغاريتمية** (logarithmic equation)، ومن أمثلتها:

$$\log_2 x = 4 \quad , \quad \log x + \log (x+3) = 1$$

ولحلّ المعادلة اللوغاريتمية جبريًّا؛ أكتبها أولًا بدلالة لوغاريتم واحد في أحد طرفَي المعادلة، ثم أستعملُ خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

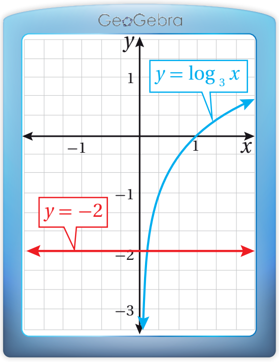
مثال 6

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

1 $\log_3 x = -2$

الدعم البياني

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيل المعادلتين $y = \log_3 x$، $y = -2$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ألاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



$\log_3 x = -2$ المعادلة الأصلية

$x = 3^{-2}$ بالتحويل إلى الصورة الأُسّية

$x = \frac{1}{3^2}$ قانون الأُسس السالبة

$x = \frac{1}{9}$ بالتبسيط

أتحقّق: للتحقّق؛ أُعوّض قيمة x في المعادلة الأصلية:

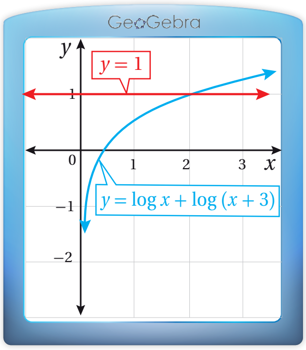
$$\log_3 \frac{1}{9} \stackrel{?}{=} -2$$

$$\log_3 3^{-2} \stackrel{?}{=} -2$$

$$-2 = -2 \quad ✓$$

إذن: حلّ المعادلة هو $x = \frac{1}{9}$

2 $\log x + \log (x+3) = 1$



الدعم البياني

أُمثّل المعادلتين $y = \log x + \log (x+3)$، $y = 1$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

$\log x + \log (x+3) = 1$	المعادلة الأصلية
$\log(x(x+3)) = 1$	قانون الضرب في اللوغاريتمات
$x(x+3) = 10^1$	بالتحويل إلى الصورة الأُسّية
$x^2 + 3x = 10$	خاصّية التوزيع
$x^2 + 3x - 10 = 0$	بإعادة ترتيب المعادلة
$(x-2)(x+5) = 0$	بتحليل العبارة التربيعية
$x - 2 = 0 \quad or \quad x + 5 = 0$	خاصّية الضرب الصفري
$x = 2 \qquad\qquad x = -5$	بحلّ المعادلة

للتحقّق؛ أُعوّض قيمة x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -5$

$\log(-5) + \log(-5+3) \stackrel{?}{=} 1$ ✗

عندما $x = 2$

$\log(2) + \log(2+3) \stackrel{?}{=} 1$

$\log(2) + \log(5) \stackrel{?}{=} 1$

$\log(2 \times 5) \stackrel{?}{=} 1$

$\log 10 \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

ألاحظ أنّ العدد -5 ليس حلًّا للمعادلة اللوغاريتمية؛ لأنّ ناتج تعويضه داخل اللوغاريتم عدد سالب، إذن: حلّ المعادلة هو $x = 2$

أتحقّق من فهمي

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

a) $5 + 2\ln x = 4$

b) $\log_5 (x+6) + \log_5 (x+2) = 1$

مثال 7 : من الحياة

كائنات حية: وجد العلماء أنّه يُمكن معرفة عمر عيّنة من كائن ميّت؛ وفقًا لنسبة الكربون 14 المتبقّية فيها عن طريق الاقتران: $A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$، حيث $A(p)$ عمر العيّنة بالسنوات، P النسبة المئوية (بالصورة العشرية) المتبقّية من الكربون 14 في العيّنة. أجد النسبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في جمجمة إنسان عمرها 2715 عامًا تقريبًا. أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

معلومة

تحتوي أنسجة الكائنات الحية على نوعين من الكربون: الكربون 14 والكربون 12، وبعد موتها فإنّ كمّية الكربون 12 تبقى ثابتة، في ما تتناقص كمّية الكربون 14 بمقدار ثابت مع الزمن.

$$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$$ المعادلة الأصلية

$$2715 = \frac{\ln p}{-0.000121}$$ بتعويض $A(p) = 2715$

$$-0.328515 = \ln p$$ بالضرب التبادلي

$$p = e^{-0.328515}$$ بالتحويل إلى الصورة الأُسّية

$$p \approx 0.72$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: النسبة المئوية من الكربون المتبقّية في الجمجمة 72%

أتحقّق من فهمي

كشفت دراسة أنّ المجموعة الأخيرة من حيوان الماموث الصوفي قد لقيت حتفها قبل 4000 سنة تقريبًا في جزيرة نائية في المحيط القطبي الشمالي. أجد النسبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في أحدها. أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان $\log_a 7 \approx 0.845$ و $\log_a 11 \approx 1.041$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1) $\log_a \frac{7}{11}$

2) $\log_a 77$

3) $\frac{\log_a 11}{\log_a 7}$

4) $\log_a \frac{1}{7}$

5) $\log_a 539$

6) $\log_7 11$

7) $\log_a (11a^2)$

8) $\log_a \sqrt[3]{121}$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المطوّلة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

9) $\log_a \left(\frac{xy}{x}\right)$

10) $\log_a (xyz)$

11) $\ln \sqrt[3]{5x^2}$

12) $\log \sqrt{\frac{m^8 n^{12}}{a^3 b^5}}$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

13 $\ln 75 + \ln 2$

14 $\log x + \log(x^2 - 1) - \log 7 - \log(x+1)\ ,\ x > 1$

15 $\log_a \frac{a}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{ax}$

16 $\frac{2}{3}\left(\ln(x^2 - 9) - \ln(x+3) + \ln(x+y)\right)\ ,\ x > 3$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

17 $\log_4 17$

18 $\log_4 \left(\frac{1}{100}\right)$

19 $\log_9 (0.0006)$

20 $\log_8 120$

21 **فيزياء:** يُقاس الضغط الجوي P بوحدة الباسكال على ارتفاع مقداره H بالأمتار؛ باستعمال المعادلة $H = 15500(5 - \log(P))$. أجد الضغط الجوي بالباسكال على قمة إفرست؛ إذا علمتُ أنّ ارتفاعها 8850 m عن سطح الأرض.

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

22 $5^{x+2} = 4^{1-x}$

23 $e^x + e^{-x} - 6 = 0$

24 $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$

25 $25^x - 3(5^x) + 2 = 0$

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

26 $\log(x+5) - \log(x-3) = \log 2$

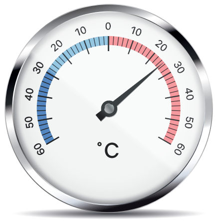
27 $\ln(x+8) + \ln(x-1) = 2\ln x$

28 $\log_3(\log_4 x) = 0$

29 $\ln x^2 = (\ln x)^2$

30 $2\log 50 = 3\log 25 + \log(x-2)$

31 **حرارة:** تُمثّل المعادلة $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسليسيوس °C) بعد t دقيقة من بدء تبريده. أجد الزمن اللازم لتبريد المعدن لدرجة حرارة 100 °C



مهارات التفكير العليا

تحدّ: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

32 $7e^{3k} - 7e^{-3k} - 48 = 0$

33 $|2^{x^2} - 8| = 3$

34 **تبرير:** إذا كانت $\log_3 x = k \log_2 x\ ,\ x > 0$؛ فأجد قيمة k مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية، وأُبرّر إجابتي.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 معامل النمو للاقتران $f(x) = 4(3^x)$ يساوي:

a) 3　b) 4

c) 12　d) 64

2 حلّ المعادلة $\ln x = -1$، هو:

a) 1　b) $\frac{1}{e}$

c) 1　d) e

3 قيمة $\log(0.01)^2$ تساوي:

a) -2　b) 2

c) 4　d) -4

4 يُكتب التعبير $\log_a 9 - 2\log_a 3 + \log_a 2$ على صورة لوغاريتم واحد:

a) $\log_a 6$　b) $\log_a 2$

c) $\log_a 9$　d) $2\log_a 3$

5 أيّ المقادير الآتية يكافئ المقدار $\log_a\left(\frac{3x^2}{y}\right)$؟

a) $2\log_a 3x - \log_a y$

b) $3\log_a x^2 - \log_a y$

c) $6\log_a x - \log_a y$

d) $\log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y$

إذا كان $\log_3 5 = c$، فأكتبُ قيمة كل ممّا يأتي بدلالة c:

6 $\log_3 15$

7 $\log_3 0.2$

8 $\log_3 125$

9 $\log_9 5$

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

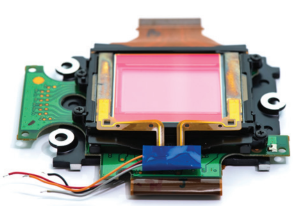
10 $\frac{1}{4}\log_3(x-3) = \log_3 6$

11 $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$

12 $e^x + e^{-x} = 5$

13 $27 = 3^{5x} \times 9^{x^2}$

حرارة: تُمثّل المعادلة $T = 18 + 12e^{0.002t}$ درجة حرارة حساس جهاز إلكتروني (بالسلسيوس °C) بعد t ساعة من بدء تشغيل الجهاز.



14 أجد حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء التشغيل.

15 عندما تصل حرارة الحساس إلى 50°C يجب إطفاء الجهاز لتبريده. بعد كم ساعة من بدء تشغيل الجهاز يتم ذلك.

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، وأجد مجالها ومداها:

16 $f(x) = 2^x + 1$

17 $g(x) = 5(3^{x+2})$

18 $h(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

19 $p(x) = 3 \ln x - 4$

صوت: تُمثّل المعادلة $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ شدة الصوت L بالديسيبل، حيث I_0 أقل قدرة صوت يُمكن للإنسان سماعها، وI مقدار الصوت المراد قياس شدته.

20 أجد شدّة صوت مقداره $5500\ I_0$

21 أجد صوتًا بدلالة I_0 شدته 32

كوالا: يتناقص عدد حيوانات الكوالا الموجود في غابة وفق المعادلة $N = 873e^{-0.078t}$ حيث N العدد المتبقّي من الكوالا في الغابة بعد t من السنوات.

22 أُمثّل اقتران الاضمحلال الأُسّي بيانيًّا.

23 أجد عدد حيوانات الكوالا المتبقّي في الحديقة بعد مرور 10 سنوات.

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المطوّلة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

24 $\log_a (\sqrt{xyz})$

25 $\ln \left(\frac{2}{3x^3 y}\right)$

26 $\ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

27 $\log_a (x\sqrt{y})$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

28 $2 \log x - \log (x + 1)$

29 $\log (x^2 - 5x - 14) - \log (x^2 - 4)\ ,\ x > 2$

30 $4 \log_b x - 2 \log_b 6 - \frac{1}{2} \log_b y$

تدريب على الاختبارات الدولية

31 قيمة $\log 12$ تساوي:

a) $3 \log 4$

b) $\log 3 + \log 4$

c) $\log 3 \times \log 4$

d) $2 \log 6$

32 $\log_{\frac{1}{2}} x^2$ يساوي:

a) $-2 \log_2 x$

b) $2 \log_2 x$

c) $-2 \log_2 |x|$

d) $\frac{1}{2} \log_2 x$

33 النقطة التي تشترك فيها الاقترانات الأُسّية جميعها التي على الصورة $f(x) = b^x$، $b > 0$ هي:

a) $(1, 1)$

b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$

d) $(0, 0)$