المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الثاني

الصف السابع

٧

الرياضيات
الجزء الثاني
الصف السابع
١٤٤٠ هـ / ٢٠١٩م

ISBN 978-9957-84-663-3

الغد

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الثاني

٧

الصف السابع

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:
هاتف : ٨ - ٥ / ٤٦١٧٣٠٤ فاكس : ٤٦٣٧٥٦٩ ص. ب: (١٩٣٠) الرمز البريدي : ١١١١٨
أو على البريد الإلكتروني: Scientific.Division@moe.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها ، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠١٦/٥٤) تاريخ ٦ /٣ /٢٠١٦م؛ بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٦ /٢٠١٧م.

ص . ب (١٩٣٠) عمّان – الأردن

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٦/٣/١١٧٤)

ISBN: 978-9957-84-663-3

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من :

أ.د حسن زارع هديب
أ.د أحمد عبدالله رحيل
أ.د عبدالله محمد ربابعة
أ.د ربى محمد مقدادي
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من :

د. لانا كمال عرفة
أسامة شوكت الزغل
غوسان عزالدين الشيخ خليل
زايد رشيد النعيمي

التحرير العلمي : د. لانا كمال عرفة، جهاد حسين ابو الركب

التصميم: عمر أحمد أبوعليان
الرسم : فايزة فايز حداد
التحرير اللغوي: وفاء مطاوع جعبور
التصوير : أديب أحمد عطوان
التحرير الفني : نداء فؤاد أبو شنب
الإنتاج : د. عبد الرحمن سليمان أبو صعيليك

دقق الطباعة: هبه ماهر التميمي
راجعها: نقين أحمد جوهر

الطبعة الأولى ١٤٣٧هـ/٢٠١٦م

أعيدت طباعته ٢٠١٧– ٢٠١٩م

قائمة المحتويات

الموضوع	الصَفْحَةُ

٥

الوحدةُ الخامسةُ

الجبرُ

يُعدُّ الجبرُ أحدَ فروعِ الرّياضيّاتِ المُهمَّةِ، وظهرَ كعلمٍ مُستقِلٍّ على أيدي العربِ المسلمينَ الذينَ كانوا سبَّاقينَ بوضعِ أصولهِ، فقد كتبوا فيهِ المؤلفاتِ بصورةٍ علميَّةٍ منظَّمةٍ، فالجبرُ يُنظرُ له على أنّهُ: دراسةُ أنظمةٍ، وأبنيةٍ مجرّدةٍ عنِ الحسابِ والعلاقاتِ، ودراسةُ الاقتراناتِ والعلاقاتِ، وتطبيقُ مجموعةٍ مِنْ لغاتِ النّمذجةِ للتّعبيرِ، ودعمِ تبريرٍ معيَّنٍ للموقفِ، أو الحالةِ المُرادِ نمذجتها.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- تعرّفِ الحدودِ والمقاديرِ الجبريّةِ.
- ترجمةِ العباراتِ اللفظيةِ إلى عباراتٍ جبريّةٍ بمتغيّرَينِ وبالعكسِ.
- جَمعِ الحدودِ والمقاديرِ الجبريةِ، وطرحها.
- حلِّ معادلةٍ خطّيةٍ بمتغيّرٍ واحدٍ بأكثرَ مِنْ خطوةٍ.

الدرسُ الأوّلُ

الحدودُ والمقاديرُ الجبريَّةُ

النتاجات

- تتعرفُ الحدَّ والمقدارَ الجبريَّ.
- تجدُ القيمةَ العدديّةَ لمقدارٍ جبريٍّ.
- تترجمُ العباراتِ اللّفظيةَ إلى مقاديرَ جبريةٍ، وبالعكسِ.

اشترى أحمدُ (٥) قمصانٍ، سعرُ القميصِ الواحدِ (س) دينارًا، واشترى سعيدٌ قميصًا واحدًا ثمنهُ (ص) دينارًا، وقدّمَ البائعُ خصمًا لكلِّ واحدٍ منهما مقدارهُ (٢) دينارًا، اكتبْ تعبيرًا جبريًّا يُمثّلُ قيمةَ ما دفعا معًا.

بما أنَّ سعرَ القميصِ الواحدِ الذي اشتراهُ أحمدُ (س) دينارًا، فإنَّ سعرَ (٥) قمصانٍ هو (٥ س) دينارًا، وسعرَ القميصِ الثاني الذي اشتراهُ سعيدٌ (ص) دينارًا ، وقيمةَ الخصمِ الذي حصلَ عليه الاثنانِ هو (٤) دنانيرَ، وبذلكَ فإنَّ التعبيرَ الجبريَّ الذي يُمثّلُ قيمةَ ما دفعَ الاثنانِ هو:

٥ س + ص − ٤

حدٌّ جبريٌّ   حَدٌّ جبريٌّ   حَدٌّ جبريٌّ

يُسمّى كلٌّ مِنْ : ٥ س ، ص ، ٤ حَدًّا جبريًّا، لاحظْ أنَّ الحدَّ الجبريَّ إمّا أنْ يكونَ حاصلَ ضربِ ثابتٍ بمتغيِّرٍ مثْلِ (٥ س)، أو متغيرًا واحدًا فقطْ مثلَ (ص)، أو ثابتًا فقطْ مثلَ (٤)، وفي بعضِ الحالاتِ يكونُ حاصلَ ضربِ متغيّرَينِ أو أكثرَ، مثلَ س ص^{٢}، س ص، س ص ع .

الحدُّ الجبريُّ: إمّا أنْ يكونَ ثابتًا، أو متغيّرًا، أو حاصلَ ضربِ ثابتٍ بمتغيّرٍ، أو حاصلَ ضربِ متغيّرَينِ أو أكثرَ، حيثُ يُسمّى الثّابتُ مُعاملًا، ويُسمّى المتغيرُ أو حاصلُ ضربِ المتغيّراتِ قسمًا رمزيًّا.

لاحظْ أنَّ إشارةَ الضّربِ تُحذفُ بينَ المُعاملِ والمتغيّرِ، حيث نكتبُ ٥ س، ولا نكتبُ ٥ × س.

مثالُ (١)

الجدولُ الآتي يبيّنُ المعاملاتِ، والقِسمَ الرّمزيَّ لحدودٍ جبريّةٍ:

الحدُّ الجبريُّ	المعاملُ	القسمُ الرمزيُّ
‎−٣س	‎−٣	س
٠,٥ س ع	٠,٥	س ع
ص	١	ص
١٢	١٢	لا يوجدُ
$\frac{٥}{٩}$ و ل ص	$\frac{٥}{٩}$	و ل ص
$\frac{-\text{س ص}}{٣}$	$\frac{-١}{٣}$	س ص

تدريبُ ١

أكملِ الجدولَ الآتي بكتابةِ المعاملاتِ والقسمِ الرمزيِّ:

الحدُّ الجبريُّ	المُعاملُ	القسمُ الرّمزيُّ
$\frac{٤}{١١}$ س		
١,٢٢ س ل		
٣٢		
ك		
$\frac{\text{-س ص}}{٥}$		

بالرجوعِ للمثالِ في مقدّمةِ الدرّسِ، لاحظْ أنَّ التّعبيرَ الجبريَّ لقيمةِ ما دفعَ كلٌّ مِنْ أحمدَ وسعيدٍ هو:

٥ س + ص − ٤ ← مقدارٌ جبريٌّ

يُسمّى هذا التّعبيرُ مقدارًا جبريًّا، فالمقدارُ الجبريُّ يتكوّنُ مِنْ: حدٍّ جبريٍّ أو أكثرَ، بينَ كلِّ حدٍّ جبريٍّ والحدِّ الذي يليهِ عمليةُ جمعٍ (+)، أو عمليةُ طرحٍ (−).

المقدارُ الجبريُّ يتكوّنُ مِنْ: حدٍّ جبريٍّ أو أكثرَ، يربطها عملياتُ جمعٍ، أو طرحٍ.

مثالُ (٢)

جِدْ عددَ الحدودِ الجبريّةِ في كلٍّ مِنَ المقاديرِ الجبريّةِ الآتيةِ:

١) س ص

٢) س − ك ل

٣) $\frac{٢}{١١}$ س ص

٤) $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ + ٢ ع

٥) س − ٢ ص + ٣ ع − ١٠

الحلُّ

١) ١ ٢) ٢ ٣) ١

٤) ٢ ٥) ٤

تدريبُ ٢

املأ الجدولَ الآتي:

المقدارُ الجبريُّ	الحدودُ الجبريةُ	عددُ الحدودِ الجبريةِ
س ص + ٢ ن	س ص ، ٢ ن	٢
س ص ع		
$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ −٢ ع ل − و		
٦ + ص + ك ل		
٥		

مثالُ (٣)

جِدِ القيمةَ العدديّةَ للمقدارِ الجبريِّ: ٥ أ + ٢ ب، إذا علمتَ أنَّ: أ = −٣ ، ب = ٢

الحلُّ

٥ × −٣ + ٢ × ٢ = −١٥ + ٤ = −١١ تعويضُ قيمتي أ،ب في المقدارِ الجبريِّ

تدريبُ ٣

إذا كانتْ س= ٣، ص = −١، ع = ٥ ، فجِدِ القيمةَ العدديَّةَ لكلٍّ ممّا يأتي:

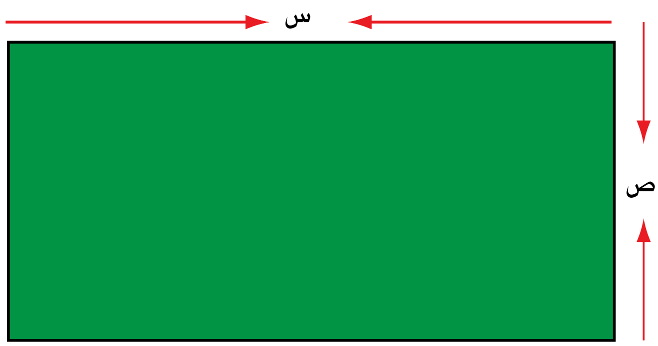
١) ٣ س + ٢ ص − ع

٢) $\frac{1}{2}$ س − ص ع

مثالُ (٤)

قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشّكلِ، يُرادُ إحاطتها بسياجٍ، تكلفةُ المترِ الواحدِ منهُ (٤) دنانيرَ، اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يُعبّرُ عنْ تكلفةِ السّياجِ.

الحلُّ



نرسمُ شكلًا تقريبيًّا للحديقةِ، ونحدّدُ أبعادها بدلالةِ الرّموزِ، حيثُ نفرضُ أنَّ طولَ الحديقةِ (س) مترًا، وعرضَ الحديقةِ (ص) مترًا،كما في الشكلِ المجاورِ، بما أنَّ طولَ السّياجِ يُساوي محيطَ الحديقةِ، فإنّ:

طولَ السّياجِ = ٢ × الطّول + ٢ × العرضِ

= ٢ س + ٢ ص

المقدارُ الجبريُّ لتكلفةِ السّياجِ = تكلفةَ المترِ الواحدِ × محيطِ الحديقةِ.

= ٤ (٢ س +٢ ص) دينارًا

= ٨ س + ٨ ص دينارًا

تدريبُ ٤

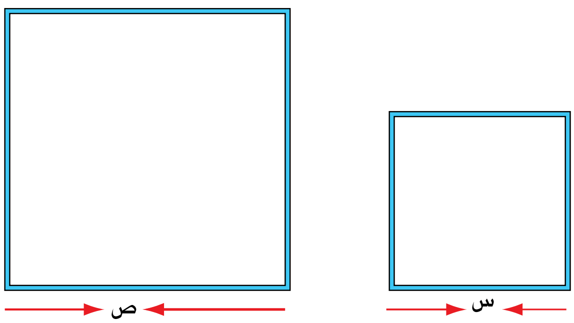
في مثالِ (٤) إذا كانَ طولُ الحديقةِ (٩٠) مترًا، وعرضها (٥٠) مترًا، فجِدْ تكلفةَ السّياجِ بالدينارِ.

مثالُ (٥)

معتمدًا الشّكلَ الآتي، الذي يُمثّلُ مربّعينِ، طولُ ضلعِ الأوّلِ (س) وحدةً، وطولُ ضلعِ الثاني (ص) وحدةً، عبّرْ عَنِ المقاديرِ الجبريّةِ الآتيةِ بعباراتٍ لفظيّةٍ:

١) ٤ س + ٤ ص

٢) $س^{٢} + ص^{٢}$



الحلُّ

٤ س + ٤ ص تعبّرُ عنْ محيطِ المربَّعِ الثاني، مضافًا إلى محيطِ المربّعِ الأول.

$س^{٢} + ص^{٢}$ تعبّرُ عنْ مساحةِ المربّعِ الثاني مضافةً إلى مساحةِ المربّعِ الأولِ.

فكّر وناقش

عبّرْ عنِ المقاديرِ الجبريّةِ في مثالِ (٥) بعباراتٍ لفظيّةٍ، بطريقةٍ أخرى.

تدريبُ ٥

عبّرْ عنِ المقاديرِ الجبريّةِ الآتيةِ بعباراتٍ لفظّيةٍ، بأكثرَ مِنْ طريقةٍ:

١) س + ص

٢) ع − ل

تمارينُ ومسائلُ

١) أكملِ الجدولَ الآتي:

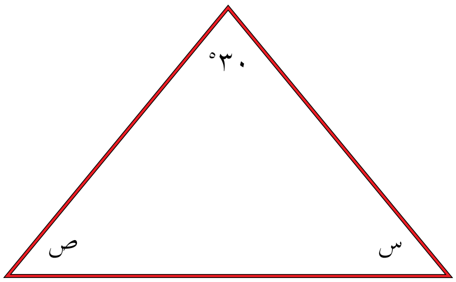
المقدارُ الجبريُّ	الحدودُ الجبريّة	عددُ الحدودِ الجبريّةِ	المُعاملاتُ
$\frac{٢س}{١١} + ٢ع$	$\frac{٢س}{١١}$ ، ٢ ع	٢	مُعاملُ س هو: $\frac{٢}{١١}$ مُعاملُ ع هو: ٢
ك – ل و + ٣ ع			معاملُ ك هو........... مُعاملُ ل و هو........... مُعاملُ ع هو.............
ص + $\frac{١}{٢}$			معاملُ ص هو.......... الثابتُ هو.....
		٣	مُعاملُ س هو: –١ مُعاملُ ص هو: ٥ مُعاملُ ع هو: –٣

٢) إذا كانتْ أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب= ٤ ، جـ = –٢ ، فجِدِ القيمةَ العدديّةَ لكلٍّ مِنَ المقاديرِ الجبريةِ الآتيةِ:

أ) ٢ أ + ٣ب – جـ ب) أ ب – ٣ جـ جـ) $\frac{ب}{أ} \times \frac{جـ}{٤}$

٣) في أحَدِ المعارضِ يوجدُ نوعانِ مِنَ السيّاراتِ، إذا كانَ ثمنُ السيّارةِ مِنَ النوعِ الأوّلِ (ل) دينارًا، وثمنُ السيّارةِ مِنَ النّوعِ الثّاني (و) دينارًا، ما المقدارُ الجبريُّ الذي يعبّرُ عنِ ثمن سيارتينِ مِنَ النّوعِ الأوّلِ، و(٣) سياراتٍ مِنَ النّوعِ الثّاني؟

٤) معتمِدًا الشكلَ المجاورِ، الذي يمّثلُ مثلّثًا حادَّ الزوايا، اكتبْ كُلًّا ممّا يأتي:



أ) المقدارَ الجبريَّ الذي يمثّلُ مجموعَ زوايا المثلّثِ.

ب) المقدارَ الجبريَّ الذي يمثّلُ قياسَ الزاويةِ س.

٥) اشترى سعيدٌ (٤) أقلامٍ، و(٦) علبِ ألوانٍ، إذا علمتَ أَنَّ ثمنَ القلمِ يختلفُ عنْ ثمنِ علبةِ الألوانِ، اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبِّرُ عنْ قيمةِ ما دفعهُ سعيدٌ للبائعِ.

٦) حوّلِ المقاديرَ الجبريَّةَ الآتيةَ إلى عباراتٍ لفظيّةٍ بأكثرَ مِنْ طريقةٍ:

أ)٣س +ص

ب) ل^{٢} – ع

٧) حوّلتْ مها المقدارَ الجبريَّ: ٣ س^{٣} + ٥ ص إلى عبارةٍ لفظيّةٍ كما يأتي:

«ثلاثةُ أضعافِ مربّعِ عددٍ، مضافًا إليه ٥ أضعافِ عددٍ آخرَ»، ما الخطأُ الذي وقعتْ فيهِ؟ اكتبِ الصّوابَ.

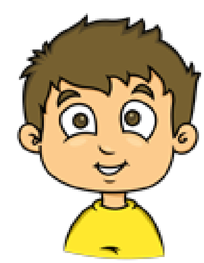
الدرسُ الثّاني

جمعُ الحدودِ الجبريّةِ وطرحها

النتاجات

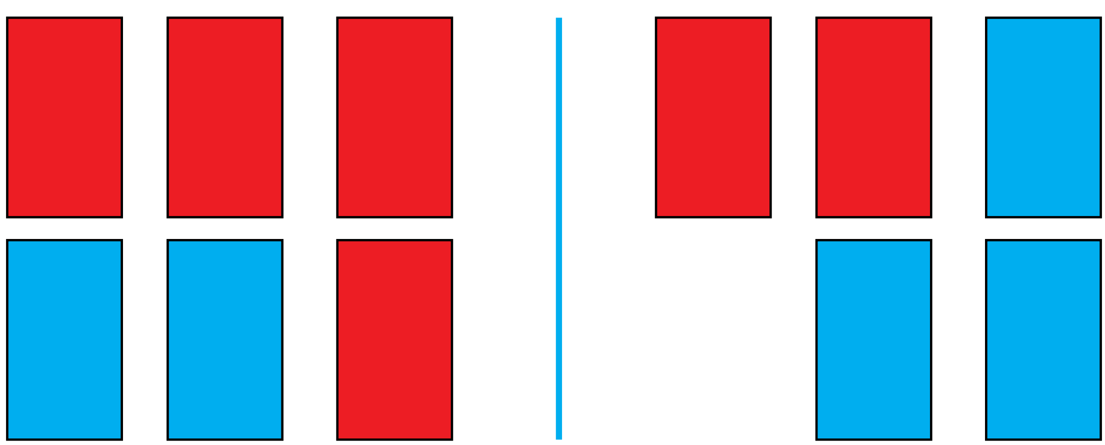
- تجمعُ الحدودَ الجبريَّةَ، وتطرحها.

لدى كلٍّ مِنْ سميرٍ وأحمدَ عددٌ مِنَ البطاقاتِ الملوّنةِ، كما في الشّكلِ الآتي، ثمنُ البطاقةِ الحمراءِ (س) قرشًا، وثمنُ البطاقةِ الزّرقاءِ (ص) قرشًا، أكملِ الفراغَ في الأسئلةِ التي تلي الشكلَ الآتي للحصولِ على عباراتٍ صحيحةٍ:



سميرٌ

أحمدُ

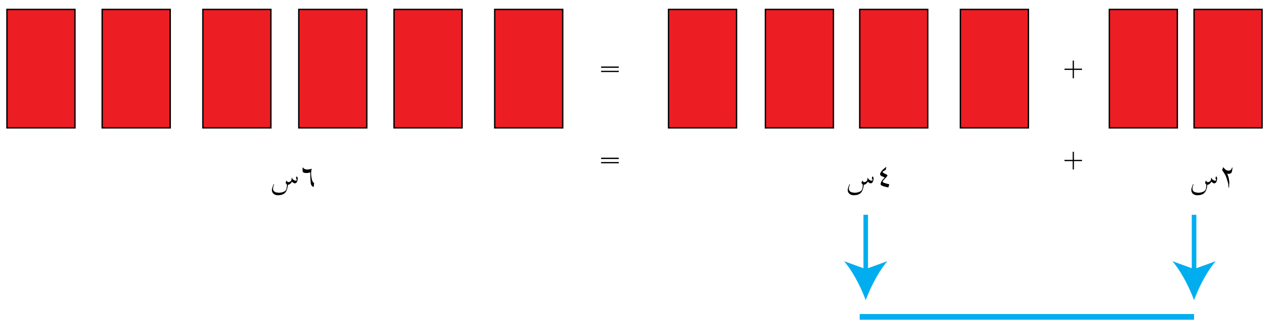


التّعبيرُ الجبريُّ لثمنِ بطاقاتِ سميرٍ الحمراءِ هو:....................

التّعبيرُ الجبريُّ لثمنِ بطاقاتِ أحمدَ الحمراءِ هو:....................

التّعبيرُ الجبريُّ لثمنِ البطاقاتِ الحمراءِ معَ كليهما هو:....................

لاحظْ أنَّ ثمنَ البطاقةِ الحمراءِ هو (س) قرشًا، وبالتالي فإنّ ثمنَ بطاقاتِ سميرٍ الحمراءِ هو: (٢ س) قرشًا، وثمنَ بطاقاتِ أحمدَ الحمراءِ هو: (٤ س) قرشًا، إذنْ مجموعُ ثمنِ البطاقاتِ الحمراءِ معَ كليهما هو:



نُسمّي الحدّينِ الجبريّينِ ٢س ، ٤ س حدّينِ متشابهينِ.

فكّر وناقش

اكتبْ تعريفًا للحدودِ المتشابهةِ بلغتكَ الخاصّةِ، وناقشهُ معَ زميلكَ.

مثالُ (١)

١) الحدودُ الجبريّةُ التاليةُ متشابهةٌ: ٢ أ ، ٨أ ، ٠,٥ أ ، $\frac{١}{٢}$ أ ؛ لأنّها تحوي نفسَ القسمِ الرّمزيِّ وهو أ.

٢) الحدودُ الجبريّةُ التّاليةُ متشابهةٌ: ٣ س^{٢} ص ، −٨ س^{٢} ص ، ٢ س^{٢}ص؛ لأنها تحوي نَفْسَ القسمِ الرّمزيِّ وهو (س^{٢} ص).

٣) الحدودُ الجبريّةُ التّاليةُ غيرُ متشابهةٍ: ٥ س ص ، ٧ س ص^{٢} ، ٢ س ص، لأنّها لا تحوي جميعًا نفسَ القسمِ الرّمزيِّ.

الحدودُ الجبريةُ المتشابهةُ: هي الحدودُ الجبريّةُ التي لها نَفْسُ المتغيراتِ، بنفْسِ الدّرجاتِ (الأُسسِ) (لها نفسُ القسمِ الرمزيِّ).

تدريب (١)

ميّزِ الحدودَ المتشابهةَ في كُلٍّ ممّا يأتي، معَ ذِكْرِ السّبب:

ع ل ، ٨ ع^{٢} ل ، ٥ ل ع ، –٥ ل^{٢} ع ، ٦ ع^{٢} ل ، –٣ ل^{٢} ع

لجمعِ الحدودِ الجبريّةِ وطرحها، نستخدمُ قواعدَ جمعِ الأعدادِ وطرحها، حيثُ نجمعُ الحدودَ الجبريّةَ المتشابهةَ فقطْ أو نطرحها، وذلكَ بجمعِ قيمةِ المُعاملِ (الثّابتِ) أو طرحهِ في كلٍّ منها، معَ بقاءِ القسمِ الرمزيِّ كما هو.

فكّر وناقش

لماذا نجمعُ الحدودَ المتشابهةَ فقطْ أو نطرحها؟ برّرْ إجابتكَ مِنْ خلالِ تقديمِ أمثلةٍ مِنْ واقعِ الحياةِ.

مثالُ (٢)

جِدْ ناتجَ كُلٍّ ممّا يأتي:

١) ٢ س + ٤ س

٢) ٦ ع – ١٠ ع

٣) ٥ س ص – ٣ س ص

٤) ٤ س^{٢} و + ٠,٥ س^{٢} و – ٠,٣ س^{٢} و

٥) ٢ ل و – س ص + ٤ ل و

٦) ٥ س^{٢} ص – ٣ س ص^{٢}

الحلُّ

١) ٢ س + ٤ س = ٦ س   جمعُ المُعاملاتِ (٢) و (٤)

٢ + ٤

٢) ٦ ع – ١٠ ع =

٦ ع + (–١٠) ع = –٤ ع   جمعُ معكوسِ الـ ١٠

٦ + –١٠

٣) ٥ س ص − ٣ س ص =

٥ س ص + (−٣) س ص = ٢ س ص — جمعُ معكوسِ الـ ٣

٥ + −٣

٤) ٤ س٢ و + ٠,٥ س٢ و − ٠,٣ س٢ و

٤ س٢ و + ٠,٥ س٢ و + − ٠,٣ س٢ و — جمعُ معكوسِ الـ ٠,٣

جمعُ المعاملاتِ

٤ + ٠,٥ + −٠,٣

= ٤,٢ س٢ و

٥) ٢ ل و − س ص + ٤ ل و

= ٢ ل و + ٤ ل و − س ص — تجميعُ الحدودِ المتشابهةِ.

= ٦ ل و − س ص

٦) ٥ س٢ ص − ٣ س ص٢

لا يمكنُ إيجادُ الناتجِ، لماذا؟

تدريبُ ٢

جِد ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) −٩ س − ٤ س

٢) ٨ ل − ٧ ل + ٤ ل

٣) −٥ ع٢ س ص − ٣ ع٢ س ص + ع٢ س ص

٤) −٨ س ص + ع و − ٤ س ص

فكّر وناقش

- هلِ الحدّانِ الجبريانِ: (٢س ص)، (−٢ص س) متشابهانِ؟ لماذا؟
- أوجدَ أيمنُ ناتجَ: ٢ ل^{٢} و س − ٧ ل^{٢} و س كما يأتي:

٢ ل^{٢} و س − (− ٧ ل^{٢} و س) = ٢ ل^{٢} و س + ٧ ل^{٢} و س

= ٩ ل^{٢} و س

هل ما قامَ بهِ صحيحٌ؟ برّرْ إجابتكَ.

تمارينُ ومسائلُ

١) املأ الجدولَ الآتي:

الحدودُ الجبريةُ	هل هي متشابهةٌ؟	السّببُ
− ٢س ، ٨ س	نَعمْ	نفسُ القسمِ الرّمزيِ وهو س
ص ، ٢س، ٣ س	....	....
ع ل ، ٦ ع ل	....	....
س ص^{٢}، ص^{٢} س	....	....
ل^{٣} و ، ل^{٢} و	....	....

٢) جِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٤ س ص + ٨ س ص

ب) −٩ ل^{٢} و + ل^{٢} و

جـ) −٥ س ع − ٤ س ع

د) ١٠ س^{٤} ص ل − ٤ س^{٤} ص ل

هـ) ٦ س^{٣} ع و − ٥ س^{٣} ع و+ س^{٣} ع و

و) ٥ س ص − ٣ س ص + ٢ ع ل

٣) اجمعْ كلَّ حدّينِ جبريّينِ متجاورينِ في كُلٍّ ممّا يأتي، واكتبِ الناتجَ داخلَ المستطيلِ الذي يعلوهما:

أ)

	....	
....		١١ س
−٢س	٨س	٣ س

ب) بالاعتمادِ على القاعدةِ السابقةِ في فرعِ (أ)، اكتبِ الحدَّ الجبريَّ المناسبَ في الفراغِ، في كلٍّ ممّا يأتي:

(١)

	....	
١٣ س^{٢}		....
٩ س^{٢}	....	٣ س^{٢}

(٢)

	٢ ع ل	
٤ ع ل		....
٩ ع ل	....	....

الدرسُ الثّالثُ جمعُ المقاديرِ الجبريّةِ وطرحها

النتاجات

- تجمعُ المقاديرَ الجبريّةَ، وتطرحها.


اشترتْ غادةُ ثلاثةَ أقلامٍ ودفترينِ، واشترتْ ناديةُ ثلاثةَ أقلامٍ وثلاثةَ دفاترَ مِنَ النّوعِ نفسهِ، أكملِ الفراغَ في كُلٍّ ممّا يأتي:

١) المقدارُ الجبريُّ الذي يعبّرُ عنْ قيمةِ ما دفعتْ غادةُ للبائعِ هو: ....

٢) المقدارُ الجبريُّ الذي يعبّرُ عنْ قيمةِ ما دفعتْ ناديةُ للبائعِ هو: ....

٣) المقدارُ الجبريُّ الذي يعبّرُ عنْ قيمةِ ما دفعتْ كلٌّ منْ غادةَ ونادية للبائعِ هو: ....

إذا فرضنا أنَّ ثمنَ الدفترِ هو(س) قرشًا، وثمنَ القلمِ هو (ص) قرشًا، فإنَّ قيمةَ ما دفعتْ غادةُ يعبَّرُ عنه جبريًّا بالمقدارِ: ٣ س + ٢ ص.

وقيمةَ ما دفعتْ ناديةُ يعبَّرُ عنهُ جبريًّا بالمقدارِ: ٣ س + ٣ ص.

ولإيجادِ قيمةِ ما دفعتِ الاثنتانِ، نجمعُ المقدارَ الجبريَّ ٣س + ٢ ص إلى المقدارِ الجبريِّ ٣ س + ٣ ص، من خلالِ تجميعِ الحدودِ المتشابهةِ في المقدارينِ معًا ثُمَّ نجمعهما.

٣س + ٢ص + ٣س + ٣ ص

حدّانِ متشابهانِ حدّانِ متشابهانِ

= ٣ س + ٣س + ٢ ص + ٣ ص

= ٦ س + ٥ ص

مثالُ (١)

جِدْ ناتجَ جمعِ المقدارينِ الجبريّينِ الآتيينِ:

٦ س + ٨ ص +٣ ، ٥ س − ص −٤

الحلُّ

٦ س + ٨ ص +٣ + ٥ س − ص −٤ جمعُ المقدارينِ معًا.

= ٦س + ٥ س + ٨ ص + − ص +٣ + −٤ تجميعُ الحدودِ المتشابهةِ معًا.

= ١١ س + ٧ ص − ١

مثالُ (٢)

اجمعِ المقدارينِ الجبريينِ الآتيينِ:

٤ س^{٢} ع^{٢} + ٧ س + ٥ ل و ، ٨ س^{٢} ع^{٢} − ٢ س − ٧ ل و +١٢

الحلُّ

٤ س^{٢} ع^{٢} + ٧ س + ٥ ل و + ٨ س^{٢} ع^{٢} − ٢ س − ٧ ل و +١٢

= ٤ س^{٢} ع^{٢} +٨ س^{٢} ع^{٢} + ٧ س + (−٢) س + ٥ ل و + (−٧) ل و +١٢

تجميعُ الحدودِ المتشابهة

= ١٢ س^{٢} ع^{٢} + ٥ س − ٢ ل و +١٢ جَمْعُ الحدودِ المتشابهةِ.

تدريبُ ١

اجمعِ المقاديرَ الجبريَّة الآتيةَ:

١) ع ل^{٣} + س ص − ١٠ ، ع ل^{٣} − ٥ س ص + ١

٢) ٢ س^{٣} ص^{٤} + ٥ ، −٥ س^{٣} ص^{٤} + ٨ ، − ٣ س^{٣} ص^{٤} + س ع + ٤

فكِّر وناقش

أجرى أحمدُ عمليةَ الجمعِ الآتيةِ:

٥ س + ٣ ص = ٨ س ص

ما الخطأُ الذي وقعَ فيهِ؟ اذكرْ أمثلةً مِنْ واقعِ الحياةِ تبرّرُ إجابتكَ.

تدريبُ ٢

أجبْ عمّا يأتي:

١) اطرحْ ٥س من ٩ س

٢) اطرحْ ٧ ص من مثلي ع

٣) اكتبْ طريقةً توضّحُ فيها كيفَ تطرحُ المقدارَ (٤س + ع) من (٩س − ٦ ع)

تذكّرْ:
ناتجُ طرحِ أ من ب تعني: ب − أ

مثالُ (٣)

اطرحْ (−٣ س^{٣} + س ص − ٣ ع ل+٥) من (٣ س^{٣} +٧ س ص + ٩ ع ل)

الحلُّ

(٣س^{٣} +٧ س ص + ٩ ع ل) − (−٣ س^{٣} + س ص − ٣ ع ل+٥)

= (٣س^{٣} +٧ س ص + ٩ ع ل) + −١ (−٣ س^{٣} + س ص − ٣ ع ل+٥)

= ٣س^{٣} + ٧ س ص + ٩ ع ل + ٣ س^{٣} + $^{-}$س ص + ٣ ع ل + $^{-}$٥

توزيعُ $^{-}$١ على المقدارِ الثاني

= ٣س^{٣} +٣س^{٣} +٧ س ص + $^{-}$س ص + ٩ ع ل + ٣ ع ل + $^{-}$٥ تجميعُ الحدودِ المتشابهةِ

= ٦ س^{٣} + ٦ س ص + ١٢ ع ل + $^{-}$٥

= ٦ س^{٣} + ٦ س ص + ١٢ ع ل − ٥

تدريب ٣

اطرحِ المقاديرَ الجبريّةَ الآتيةَ:

١) (٨ ع ل^{٢} + س ص − ٢) من (− ع ل^{٢} + ٦ س ص +٧)

٢) (− س^{٣} ص^{٢} − و ل^{٣} + ٦ ع) من (س^{٣} ص^{٢} − ٣ و ل^{٣} − ٢ ع)

تدريب ٤

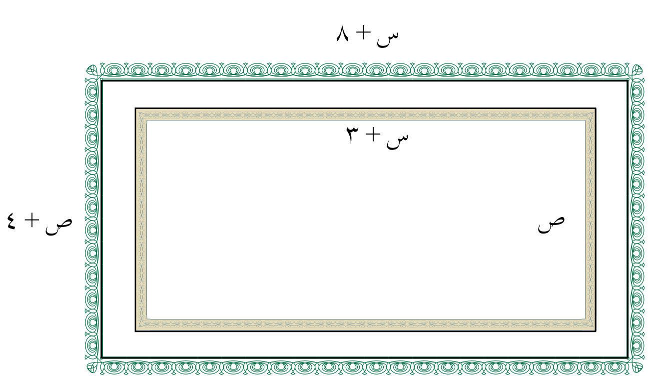
هلِ العبارةُ الآتيةُ صحيحةٌ أمْ لا؟ برّرْ إجابتك

(س + ١) − ٥ (س+ ١) = −٤

اكتبْ طريقةً تبيّنُ فيها لزميلك كيفَ تطرحُ مقدارينِ جبريّينِ.

تدريب ٥

إذا كانتْ تكلفةُ المترِ الواحدِ للإطارِ الخارجيِّ للوحةِ إعلاناتٍ في الشّكلِ الآتي ٥ دنانيرَ، وتكلفةُ المترِ الواحدِ للإطارِ الداخليِّ لها ٤ دنانيرَ، اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبِّرُ عنِ الزّيادةِ في تكلفةِ الإطارِ الخارجيِّ لهذه اللوحةِ، عنْ تكلفةِ الإطارِ الدّاخليّ لها.



تمارينُ ومسائلُ

١) اجمعِ المقاديرَ الجبريّةَ الآتيةَ:

أ) (٩ س ص + ٥ل) ، (−٢ س ص − ل)

ب) (٧ ع ل^{٢} − ٤ ع − ١) ، (٦ ع ل^{٢} + ٢ ع + ٣)

جـ) (س^{٣} ع^{٢} − س ص) ، (٤س^{٣} ع^{٢} +٥ س ص −٢)

٢) جِدْ ناتجَ طرحِ:

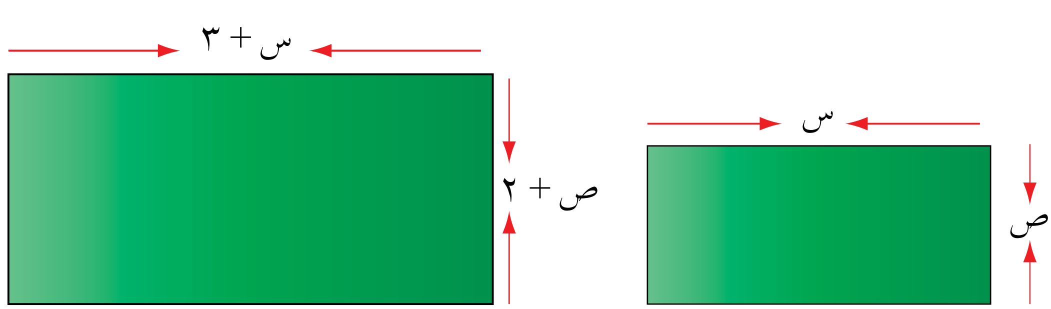
أ) (س ص ع + ٢ ل) من (٩ س ص ع − ٣ ل)

ب) (ع^{٢} ل − ٥س +٧ ص) من (−٢ ع^{٢} ل + س − ص)

جـ) (−٣ ص^{٢} + ٥ س ع − ١٠) من (−٥ ص^{٢} − ٥ س ع +١٢)

٣) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبِّرُ عن محيطِ مثلّثٍ أطوالُ أضلاعِه (س + ٢)، (س + ٣) ،(س +٤)

٤) حديقتانِ كلٌّ منهما على شكلِ مستطيلٍ، أبعادهما موضَّحةٌ في الشّكلِ الآتي، يُرادُ إحاطة كلٍّ منهما بسياجٍ، إذا كانتْ تكلفةُ المترِ الواحدِ مِنَ السّياجِ (٦) دنانيرَ، فاكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبِّرُ عنْ تكلفةِ السياجِ للحديقتينِ:



٥) اشترى خالدٌ عددًا مِنَ الأقلامِ، سعرُ القلمِ الواحدِ ١٥ قرشًا، وعددًا مِنْ علبِ الألوانِ، سعرُ العلبةِ الواحدةِ ٣٠ قرشًا، اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبِّرُ عنْ قيمةِ ما دُفعَ للبائعِ.

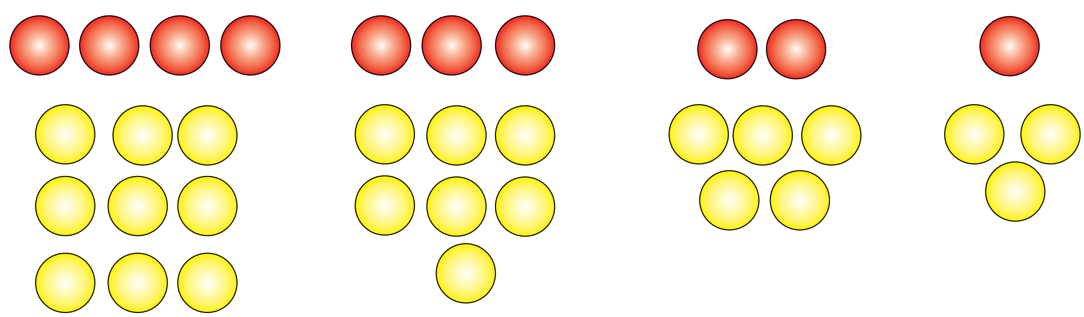
الدرسُ الرابع

المعادلةُ الخطّيةُ بمتغيّرٍ واحدٍ

النتاجات

- تحلُّ معادلةً خطيّةً بمتغيرٍ واحدٍ، تتضمنُ أكثرَ مِنْ خطوةٍ.

تأمّلِ النّمطَ في الشّكلِ الآتي، واستنتجْ قاعدتهُ، ثُمَّ أكملِ الجدولَ الذيَ يليهِ لإيجادِ قيمةِ المتغيرِ س:



عددُ الكراتِ الحمراءِ	١	٢	٣	٤	٥	س
عددُ الكراتِ الصفراءِ						١٧

لعلّكَ استنتجتَ أنَّ قاعدةَ النّمطِ هي:

٢ س + ١، ولإيجادِ عددِ الكراتِ الحمراءِ (س)، التي تقابلُ (١٧) كرةً صفراء، نكوّنُ المعادلةَ : ٢ س +١ = ١٧

ثُمَّ نحلّها لإيجادِ قيمةِ المتغيّرِ س، من خلالِ كتابةِ معادلةٍ مكافئةٍ بمتغيّرٍ في طرفٍ واحدٍ، باستخدامِ خواصِّ المساواةِ وهي: .... اذكرها.

تذكّرْ:

المعادلةُ الخطيةُ بمتغيرٍ واحدٍ هي جملةٌ رياضيةٌ تحوي متغيّرًا واحدًا، حيثُ تُستخدمُ إشارةُ المساواةِ (=) لتوضيحِ أنَّ الطرفينِ متساويانِ.
قيمةُ المتغيّرِ الـذي يجعـلُ المعادلـةَ عبارةً صحيحةً يُسمّى حلاًّ للمعادلةِ.

٢ س + ١ = ١٧

٢ س + ١ − ١ = ١٧ − ١ إضافةُ معكوس الـ ١

٢ س × $\frac{١}{٢}$ = ١٦ × $\frac{١}{٢}$ بالضربِ بمقلوبِ الـ ٢ أو بالقسمةِ على ٢ (النظير الضربي)

س = ٨

إذن عددُ الكراتِ الحمراءِ هو ٨

التحققُ:

٢ × ٨ + ١ $\overset{?}{=}$ ١٧

١٧ = ١٧ إذنْ: الحلُّ صحيحٌ.

فكّر وناقش

هلْ يمكنُ ايجادُ عددِ الكراتِ الحمراءِ التي تُقابلُ ١٧ كرةً صفراءَ بطريقةٍ أخرى؟ اذكرها.

تدريب (١)

قامتْ حنانُ بتوفيرِ عددٍ منَ القطعِ النقديةِ منْ فئةِ الخمسةِ قروشٍ يوميًا حسبَ النمطِ الآتي:

اليومُ	١	٢	٣	٤	٥	.....	س
عددُ القطعِ النقديةِ	٤	٥	٦	٧	٨	.....	١٥

في أيِّ يومٍ توفّرُ حنانُ ١٥ قطعةً نقديّةً؟ (جِدِ النّاتجَ بأكثرَ منْ طريقةٍ)

مثالُ (١)

حُلَّ المعادلةَ: ٢ + ٣ س = ١٠ − س، وتحققْ مِنْ صحّةِ الحلِّ.

الحلُّ

نقومُ بتجميعِ المتغيّراتِ في أحدِ طرفَي المعادلةِ، والثوابتِ في الطرفِ الآخرِ منها،

٢ + (−٢) + ٣ س = ١٠ + (−٢) − س   إضافةُ معكوسِ الـ٢ للطرفينِ (النظيرِ الجمعي)

٣ س + س = ٨ − س + س   إضافةُ س إلى الطرفين

٤ س = ٨   بقسمةِ الطرّفينِ على ٤ (النظيرِ الضربي)

س = ٢

التّحقّقُ:

نعوّضُ بقيمةِ س = ٢ في المعادلةِ.

٢ + ٣ × ٢ ؟= ١٠ − ٢

٨ = ٨   إذنْ: الحلُّ صحيحٌ.

مثالُ (٢)

حُلَّ المعادلةَ : ٢ (س − ٤) = ١٢، وتحققْ مِنْ صحّةِ الحلِّ.

الحلُّ

٢ س − ٨ = ١٢   توزيعُ العدد ٢ على القوسِ،

٢ س − ٨ + ٨ = ١٢ + ٨   إضافةُ معكوسِ العدد ٨ للطرفينِ.

٢ س = ٢٠

س = ١٠   بالقسمةِ على ٢.

التّحقّقُ:

نعوّضُ بقيمةِ س = ١٠ في المعادلةِ.

٢ (١٠ − ٤) ؟= ١٢

٢ × ٦ ؟= ١٢

١٢ = ١٢   إذنْ: الحلُّ صحيحٌ

فكّر وناقش

هلْ يمكنُ حلُّ المعادلةِ في مثالِ (٢) بطريقةٍ أخرى؟ اكتبها.

مثالُ (٣)

حلَّ المعادلةَ: $\frac{\text{س} + ٢}{٣} - ٤ = ٦$ ، وتحققْ من صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

$\frac{\text{س} + ٢}{٣} \times ٣ - ٤ \times ٣ = ٦ \times ٣$ ضربُ طرفي المعادلةِ بالعددِ ٣ (النظيرِ الضربيّ للمقامِ)

$\text{س} + ٢ - ١٢ = ١٨$ جمعُ الحدودِ المتشابهةِ

$\text{س} - ١٠ = ١٨$

$\text{س} - ١٠ + ١٠ = ١٨ + ١٠$ إضافةُ معكوسِ الـ (−١٠) (النّظيرِ الجمعي)

$\text{س} = ٢٨$

التّحقّقُ

نعوّضُ بقيمةِ س = ٢٨ في المعادلةِ.

$\frac{\text{س} + ٢}{٣} - ٤ = ٦$

$\frac{٢٨ + ٢}{٣} - ٤ \stackrel{?}{=} ٦$

$\frac{٣٠}{٣} - ٤ \stackrel{?}{=} ٦$

$٦ = ٦$ إذن الحلُّ صحيح

فكّر وناقش

هل يمكنُ حلُّ المعادلةِ في المثالِ (٣) بطريقةٍ أخرى؟ اذكرها.

تدريبُ ٢

حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ، ثُمَّ تحققْ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

١) ٥ س + ١٠ = ٢٥

٢) – س + ٣ = – ٥

٣) $\frac{\text{س} - ١}{٥}$ + ١٢ = ١

٤) ٤ (س – ٣) + ٢ = ١٥

٥) ٦ – ٢س = ٥ (٣ – س)

٦) ٣ (س – ١) = ٥ – ٢ س

فكِّر وناقش

• حلَّ عمرُ المعادلةَ: ٤ – ٢ س = ١٢ كما يأتي:

٤ – $\frac{٢\text{س}}{٢}$ = $\frac{١٢}{٢}$

٤ – س = ٦

س = –٢

اكتشفِ الخطأَ في حلّهِ، واكتبِ الصّوابَ.

• اشرحْ واكتبْ طريقةً لزميلكَ تساعدهُ في الحكمِ على حلّهِ للمعادلةِ، إنْ كانَ صحيحًا أمْ غيرَ صحيحٍ.

مثالُ (٤)

إذا جُمعَ ١٢ إلى ثلاثةِ أمثالِ عددٍ ما، أصبحَ الناتجُ ٣٣، فما العددُ؟

الحلُّ

أفهم : جُمعَ ثلاثةُ أمثالِ عددٍ إلى العددِ ١٢ فأصبحَ الناتجُ ٣٣،فما العددُ

أخطط: نفرضُ أنَّ العددَ س، إذنْ ثلاثةُ أمثالِ العددِ هو ٣ س، وجُمعَ له العددُ ١٢، إذنْ التّعبيرُ الجبريُّ هو: ٣ س + ١٢، وبما أنَّ الناتجَ ٣٣، إذنْ المعادلةُ هي:

٣ س + ١٢ = ٣٣

أحلُّ : نحلُّ المعادلةَ

٣ س + ١٢ = ٣٣

٣ س + ١٢ + −١٢ = ٣٣ + −١٢ إضافةُ معكوسِ العدد ١٢ (النّظيرِ الجمعيّ)

٣ س = ٢١

$\frac{\text{٣س}}{٣} = \frac{٢١}{٣}$ بالقسمةِ على ٣ (النظيرِ الضربيّ)

س = ٧

أتحقق: نعوضُ بقيمة س في المعادلةِ

٣ × ٧ + ١٢ $\stackrel{?}{=}$ ٣٣

٣٣ = ٣٣

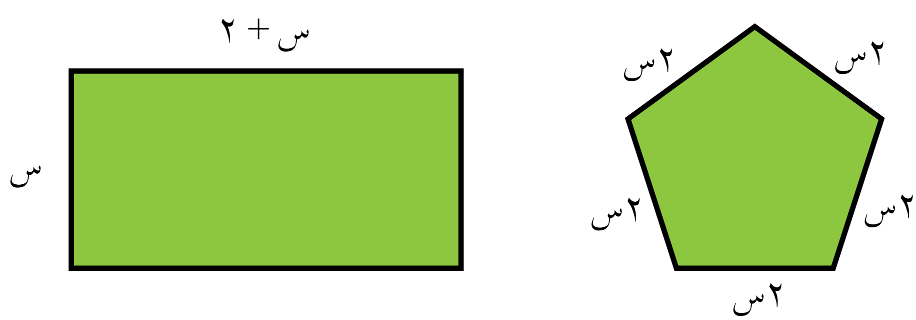
إذنْ: الحلُّ صحيحٌ.

تدريبُ ٣

ثلاثةُ أمثالِ عُمْرِ سلمى يزيدُ بمقدارِ ٥ عن مثلَي عُمْرِ فرحَ، إذا علمتَ أنَّ عُمْرَ فرحَ ١٠ سنواتٍ، فما عُمْرُ سلمى؟

فكّر وناقش

ما قيمةُ س التي تجعلُ محيطَي الشّكلينِ الآتيينِ متساويينِ؟



مثالُ (٥)

في أحدِ المعارضِ الفنّيةِ تذكرةُ الدّخولِ للكبارِ ٤ دنانيرَ، وتذكرةُ الدّخولِ للأطفالِ ديناران، إذا كانَ العددُ الكليُّ للزائرينَ مِنَ الكبارِ والأطفالِ ٢٠ شخصًا، وكانتْ قيمةُ مبيعاتِ التّذاكرِ في ذلكَ اليومِ ٥٨ دينارًا، فما عددُ الزائرينَ مِنَ الكبارِ والأطفالِ في ذلكَ اليومِ؟

الحلُّ

يمكنُ استخدامُ استراتيجيةِ «خمّنْ واختبرْ» لإيجادِ عددِ الزائرينَ في المعرضِ، حيثُ نكوّنُ جدولًا ونكتبُ فيهِ جميعَ الحالاتِ التي يكونُ فيها مجموعُ عددِ الزائرينَ هو ٢٠ شخصًا، ثُمَّ نحسِبُ قيمةَ مبيعاتِ التذاكرِ في كلِّ حالةٍ كما يأتي:

عددُ الكبارِ	عددُ الأطفالِ	قيمةُ مبيعاتِ التّذاكرِ
١	١٩	١ × ٤ + ١٩ × ٢ = ٤٢
٢	١٨	٢ × ٤ + ١٨ × ٢ = ٤٤
٣	١٧	٣ × ٤ + ١٧ × ٢ = ٤٦
٤	١٦	٤ × ٤ + ١٦ × ٢ = ٤٨
٥	١٥	٥ × ٤ + ١٥ × ٢ = ٥٠
٦	١٤	٦ × ٤ + ١٤ × ٢ = ٥٢
٧	١٣	٧ × ٤ + ١٣ × ٢ = ٥٤
٨	١٢	٨ × ٤ + ١٢ × ٢ = ٥٦
٩	١١	٩ × ٤ + ١١ × ٢ = ٥٨
١٠	١٠	١٠ × ٤ + ١٠ × ٢ = ٦٠
⋮		

من خلالِ الحالاتِ السابقةِ تبيّنَ أنّهُ: إذا كانَ عددُ الزائرينَ مِنَ الأطفالِ ١١، ومِنَ الكبارِ ٩، فإنَّ قيمةَ المبيعاتِ ٥٨ دينارًا، هلْ يوجدُ حلٌّ آخرُ؟ اكتبهُ.

تمارينُ ومسائلُ

١) حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ، ثُمَّ تحققْ من صحّةِ الحلِّ:

أ) $٣ س + ٥ = ٢٠$

ب) $\frac{س}{٥} - ٢ = ١$

جـ) $١٢ - ٢ س = -٦$

د) $-(س - ١) + ٢ س = ١٠$

هـ) $س + ٤ = ٣ (٥ - ٦ س)$

و) $٥ س - ٥ = ٤ س + ٣$

٢) حّولِ العباراتِ اللفظيّةَ الآتيةَ إلى معادلاتٍ، ثُمّ حلّها، وتحقّقْ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

أ) الفرقُ بينَ ١٥ ومثلَي عددٍ ما هو ٣

ب) أُضيفَ العددُ ١٠ إلى ناتجِ قسمةِ عددٍ ما على ٦ ، فكانَ الناتجُ ١٤

جـ) يزيدُ العددُ ٢٠ بمقدارِ ٢ على ثلاثةِ أمثالِ عددٍ ما.

٣) أيُّ القيمِ الآتيةِ هي حلٌّ للمعادلةِ: $٦ - س = ٦$

أ) ٦ ب) -٦ جـ) ٠ د) ١٢

٤) أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تعبّرُ عنِ العبارةِ اللفظيةِ « يزيدُ العددُ ١٤ عنْ مثلَي عددٍ ما بمقدارِ ٢ »

أ) $٢س + ١٤ = ٢$

ب) $٢س - ١٤ = ٢$

جـ) $١٤ - ٢ س = ٢$

د) $١٤ + ٢ س = ٢$

٥) اشترتْ إشراقُ طاولةً بمبلغِ ٢٥٠ دينارًا، وعددًا مِنَ المقاعدِ، ثمنُ المقْعدِ الواحدِ ١٥ دينارًا، إذا كانتِ التكلفةُ الكليةُّ للمشترياتِ ٤٠٠ دينارًا، فما عددُ المقاعدِ؟

٦) تبرعَ عليٌّ و سميرٌ بمبلغِ ٤٥٠ دينارًا ، إذا كانَ المبلغُ الذي تبرعَ به عليٌّ يزيدُ بمقدارِ ١٥٠ دينارًا عنِ المبلغِ الذي تبرّعَ بهِ سميرٌ، ما المبلغُ الذي تبرّعَ بهِ سميرٌ؟

٧) محيطُ مستطيلٍ ٢٠ سم، إذا كانَ طولهُ يزيدُ عنْ عرضهِ بمقدارِ ٢، فجِدْ مساحتهُ.

٨) شكلان هندسيّان، الأول مستطيلٌ أبعادهُ: ٣ س ، ٢ س ، والثاني مربّعٌ طولُ ضلعهِ س ، هلْ يمكنُ إيجادُ قيمةِ س، حَيْثُ يكونُ محيطي الشّكلينِ متساويينِ؟
برّرْ إجابتكَ.

٩) استخدمْ استراتيجيةً (طريقةً) خاصةً بكَ لحلِّ المسألةِ الآتيةِ:

وُلدتْ «نهى» و«حنان» و «فرحُ» في نَفْسِ الشّهرِ، إذا كانتْ «نهى» أصغرَ مِنْ «حنان» بعامينِ، وأكبرَ مِنْ «فرح» بثلاثةِ أعوامٍ، إذا علمتَ أَن عُمْرَ «فرحَ» (١٢) عامًا، فما عُمْرُ كلٍّ مِنْ «نهى» و«حنان»؟

مراجعةٌ

١) أكملِ الجدولَ الآتي:

المقدارُ الجبريُّ	الحدودُ الجبريّةُ	عددُ الحدودِ الجبريّةِ
س ص + ٢ س + ع ل	س ص ، ٢ س، ع ل	٣
٤		
س − ١		
٠,٥س^{٢} ل ع^{٣}		
$\frac{\text{س ع ل}}{٥}$ + س − ١٠		

٢)جِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٤ س ص + ٥ س ص − س ص

ب) − ل ع + ٤ ل ع − ١٠ ل ع

جـ) س^{٢} ص^{٢} + ٣ س^{٢} ص^{٢} − ٦ س^{٢} ص^{٢}

٣) اجمعِ المقاديرَ الجبريةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (٢ س ص + ٥ل) ، (−٨ س ص − ٢ ل)

ب) (ع ل^{٢} − ٤ ع + ١) ، (−٢ ع ل^{٢} − ٢ ع +٤)

جـ) (٣س^{٣} ع^{٢} − ٢س ص) ، (٤س^{٣} ع^{٢} −٥ س ص−٦)

٤) جِدْ ناتجَ الطّرحِ في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (٣س ص ع + ٢ ل) من (٩ س ص ع − ٨ ل)

ب) (−ع^{٢} ل + ٥س +ص) من (−٢ ع^{٢} ل − س − ص)

جـ) (−٦ ص^{٢} − ٣ س ع − ١) من (−٥ ص^{٢} − ٥ س ع +١٢)

٥) حوّل العباراتِ الجبريّةَ الآتيةَ إلى عباراتٍ لفظيّةٍ:

أ) س + ٣ ص

ب) ٢ س − ١٠

٦) يتقاضى عاملٌ راتبًا شهريًّا مقدارهُ ١٠٠ دينارٍ، بالإضافةِ إلى ٠,٢٥ عمولةٍ مِنْ قيمةِ المبيعاتِ الشهريّةِ، ويتقاضى عاملٌ آخرُ راتبًا شهريًّا مقدارهُ ٢٠٠ دينار، وعمولةً ٠,٠٥ مِنْ قيمةِ المبيعاتِ الشهريّةِ، ما قيمةُ المبيعاتِ الشهريّةِ التي تجعلُ دخْلَ العاملِ الأوّلِ مساويًا لدخلِ العاملِ الثّاني؟

٧) يقدّمُ برنامجٌ للمسابقاتِ مبلغَ ١٥٠ دينارًا، و ٥ دنانيرَ إضافيّةً عِنْ كلِّ سؤالٍ يجيبُ عنهُ المتسابقُ إجابةً صحيحةً، إذا حصلَ أحدُ المتسابقينَ على مبلغِ ١٧٥ دينارًا، فكمْ عددُ الأسئلةِ التي أجابَ عنها بصورةٍ صحيحةٍ؟

٨) حُلَّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةَ، ثُمَّ تحقّقْ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

أ) −٢ س − ٥ = ٧

ب) $\frac{\text{س}}{\text{٥}}$ − ٢ = ١٠

جـ) ٣ − ٦ س = − ١٥

د) −(٥ س + ١) + ٣ س = ١٩

هـ) س + ٨ = ٣ + ٦ س

و) ٢ س − ١ = س + ١١

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ مِنْ ٥ فقراتٍ مِنْ نوعِ الاختيارِ مِنْ متعدّدٍ، كلُّ فقرةٍ لها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ في ما يأتي:

(١) عددُ الحدودِ الجبريّةِ في المقدارِ الجبريِّ: ٢ س ص – ١ هو:

أ) ٤ ب) ٢

جـ) ١ د) ٣

(٢) القسمُ الرمزيُّ للحدِّ الجبريِّ – ٤ $س^{٢}$ ص ل هو:

أ) –١ ب) $س^{٢}$

جـ) – ٤ $س^{٢}$ ص ل د) $س^{٢}$ ص ل

(٣) ترجمةُ العبارةِ اللفظيّةِ التاليةِ: «ناتجُ طرحِ أربعةِ أمثالِ عددٍ مِنْ مثلَي عددٍ آخرَ هو ٧» إلى تعبيرٍ جبريٍّ هو:

أ) ٤ س – ٢ ص = ٧ ب) ٢ ص – ٤ س = ٧

جـ) ٢ ص = ٧ – ٤ س د) ٢ س = ٧ – ٤ ص

(٤) حَلُّ المعادلةِ: $\frac{س}{٢}$ – ٤ = ٨ هو:

أ) ٦ ب) ٨

جـ) ٢٤ د) ٢

(٥) ناتجُ طرحِ (٨ س ص) مِنْ (–٢ س ص) هو:

أ) ٦ س ص ب) ١٠ س ص

جـ) –١٠ س ص د) – ٦ س ص

٢) جِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) -٩ س ص $-$ ٤ س ص

ب) (٤ س ص ل + ٧ س) $-$ (٨ س ص ل $-$ ٢ س)

جـ) ($-$ س^{٢} ص^{٢} + ٥ م ع $-$ ل) + (٩ س^{٢} ص^{٢} $-$ م ع + ٥ ل)

٣) حُلَّ كلاًّ مِنَ المعادلاتِ الآتية، ثُمّ تحقّقْ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

أ) ٦ $-$ ٤ س = ٨

ب) $\frac{س}{٢}$ + ٥ = $-$١٥

جـ) ٢ (س $-$ ١) + ٣ (س $-$ ١) = ٦

٤) أكملِ الجدول الآتي:

التعبيرُ اللفظيُّ	التعبيرُ الجبريُّ
ناتجُ طرح عددٍ مِنْ مثلَي عددٍ آخرَ هو ٨	....
محيطُ مستطيلٍ هو ١٠ وحداتٍ	....
....	س + ٣ ص = ١٥

٥) عددان موجبان مجموعهما (١٠)، ومجموعُ مربعيهما أكبرُ ما يمكنُ، ما العددانِ؟

(يمكنكَ ملءُ الجدولِ الآتي لإيجادِ الحلِّ):

العددُ الأوّلُ	العدد الثّاني	مربّعُ الأولُ	مربّعُ الثاني	مجموعُ مربّعيهما
١	٩	١	٨١	٨٢
٢	٨	٤	٦٤	٦٨
٣	٧	٩	٤٩	٥٨
٤	٦	....	....	....
٥	....	....	....	....
٦	....	....	....	....
٧	....	....	....	....
٨	....	....	....	....
٩	....	....	....	....

٦

الوحدةُ السادسةِ

الهندَسةُ

إذا نظرنا إلى الإنجازاتِ الحضاريةِ القديمةِ كالبتراءِ، والأهراماتِ، وجرشَ، والمساجدِ، والقبابِ، نجدُها جميعها قد شيّدتْ بدقةٍ عاليةٍ معتمِدةً على خصائصَ هندسيةٍ للزوايا، والمثلّثاتِ، والمنحنياتِ، والتماثلِ.

أضفْ إلى ذلكَ المِلاحةَ، وأبحاثَ الفضاءِ، والكثيرَ مِنَ الصناعاتِ التي تعتمدُ على الهندسةِ اعتمادًا كليًّا.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- تحديدِ قياساتِ زوايا متجاورةٍ، ومتقابلةٍ بالرأسِ في رسومٍ هندسيّةٍ، باستخدامِ التّبريرِ الرياضيِّ.
- تحديدِ قياساتِ زوايا متتامّةٍ، ومتكاملةٍ في رسومٍ هندسيّةٍ باستخدامِ التّبريرِ الرّياضيِّ.
- تحديدِ قياساتِ زوايا متناظرةٍ، ومتبادلةٍ في رسومٍ هندسيةٍ باستخدامِ التّبريرِ الرّياضيِّ.
- اختبارِ توازي مستقيماتٍ؛ باستخدامِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.
- تعرّفِ أنواعِ المثلثاتِ.
- إيجادِ محيطِ ومساحةِ الدائرةِ.

الدرسُ الأوّلُ الزوايا المتجاورةُ والزوايا المتقابلةُ بالرأسِ

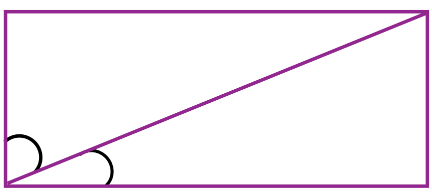
النتاجات

- تحدّدُ قياساتِ زوايا متجاورةٍ، أو متقابلةٍ بالرأسِ في رسومٍ هندسيّةٍ باستخدامِ التّبريرِ الرّياضيّ.

رَسمَتْ علا مستطيلاً، ثم قامتْ برسمِ أحدِ أقطارِه، فلاحظتْ تكوّنَ زوجٍ منَ الزوايا التي تقعُ بجانبِ بعضها البعضِ كما في الشكلِ المجاورِ.

هل تشتركُ الزاويتانِ بنفسِ الرأسِ؟

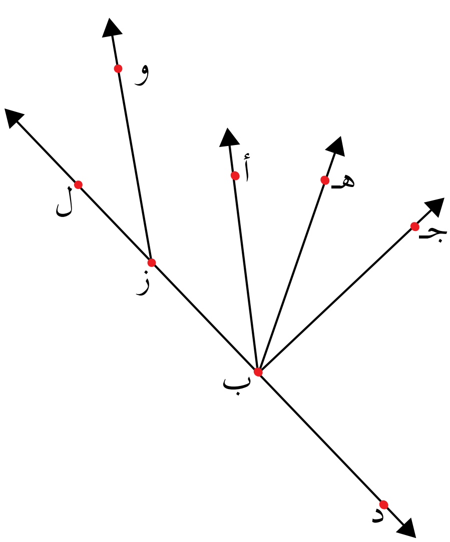
هل هناكَ ضلعٌ مشترَكٌ بينَ الزاويتينِ؟



الزاويتانِ المتجاورتانِ: هما الزاويتانِ اللتانِ تقعانِ في نفسِ المستوى، و تشتركانِ في رأسٍ وضِلْعٍ ولا توجدُ نقاطٌ داخليّةٌ مشترَكةٌ بينهما.

مثالُ (١)

انظرِ الشّكلَ المجاورَ:



١) هلْ ∡ أ ب جـ ، ∡ جـ ب د زاويتانِ متجاورتانِ؟ برّرْ إجابتكَ.

٢) هلْ ∡ جـ ب د ، ∡ أ ب هـ زاويتانِ متجاورتانِ؟ برّرْ إجابتكَ.

٣) هلْ ∡وزل ، ∡ أ ب جـ زاويتانِ متجاورتانِ؟ برّرْ إجابتكَ.

الحلُّ

١) نعمْ زاويتانِ متجاورتانِ؛ لأنهما تشتركانِ بالرأسِ، ب، و بالضلعِ ب جـ ، ولا توجدُ بينهما نقاطٌ داخليّةٌ مشتركةٌ.

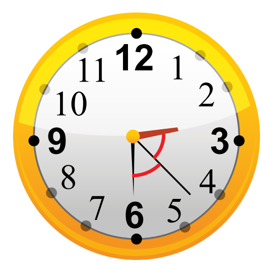
٢) لا، زاويتانِ غيرُ متجاورتينِ؛ لأنهما لا تشتركانِ بضلعٍ.

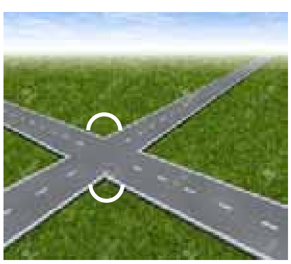
٣) لا، زاويتانِ غيرُ متجاورتينِ، لأنهما لا تشتركانِ برأسٍ، ولا ضلعٍ.

• ناقشْ صحّةَ العبارةِ الآتيةِ: "كلُّ زاويتينِ متجاورتينِ متساويتانِ في القياسِ".

تدريبُ ١

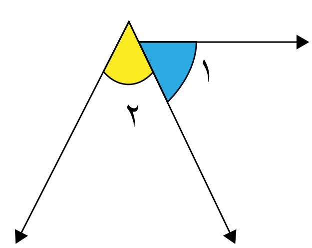
هلِ الزوايا المُشارُ إليها في الأشكالِ الآتيةِ تُمثّلُ زوايا متجاورةً؟ ناقشْ ما توصلتَ إليهِ معَ زميلكَ.





تدريبُ ٢

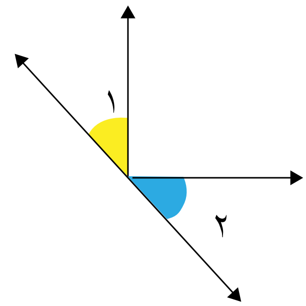
بيّنْ في ما إذا كانَ كلُّ زوجٍ مِنْ أزواجِ الزوايا يُمثّلُ زوايا متجاورةً أم لا، معَ ذِكْرِ السّببِ في كلٍّ ممّا يأتي:



نعمْ

لا

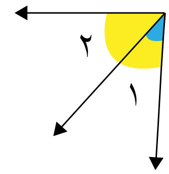
السّببُ ....



○ نعمْ

○ لا

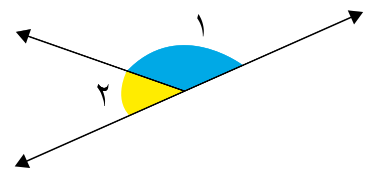
السّببُ ....



○ نعمْ

○ لا

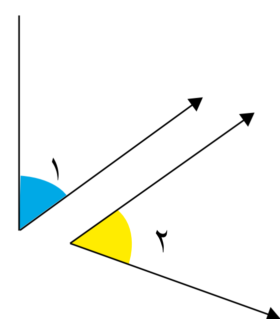
السّببُ ....



○ نعمْ

○ لا

السّببُ ....



○ نعمْ

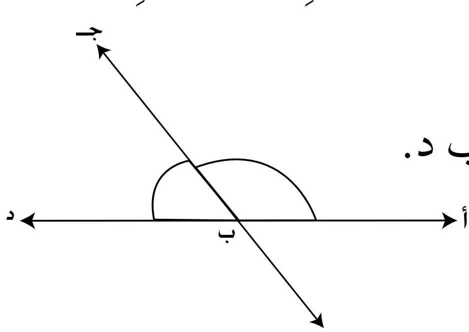
○ لا

السّببُ ....

يُرمزُ لقياسِ الزاويةِ س بالرّمزِ ق ∡ س.

نشاطُ (١)

١) انظرْ إلى الشّكلِ المجاورِ، هلْ ∡ أ ب جـ ، ∡ جـ ب د زاويتانِ متجاورتانِ؟ برّرْ إجابتكَ.



٢) باستخدامِ المَنقلةِ أوجدْ ق ∡ أ ب جـ ،ق ∡ جـ ب د.

ما مجموعُ قياسِ هاتينِ الزاويتينِ؟

٣) ماذا نُسمّي ∡ أ ب د ؟

لابدَّ أنّكَ لاحظتَ منَ النّشاطِ السّابقِ أنَّ: ∢ أ ب جـ ، ∢ جـ ب د تمثّلانِ زوجًا مِنَ الزوايا المتجاورةِ على قطعةٍ مستقيمةٍ، وأنَّ مجموعَ قياسِ هاتينِ الزاويتين = ١٨٠°

إذا تقاطعَ مستقيمانِ، فإنَّ مجموعَ قياسِ أيِّ زاويتينِ متجاورتينِ ناتجتينِ عنِ التقاطعِ يساوي ١٨٠°.

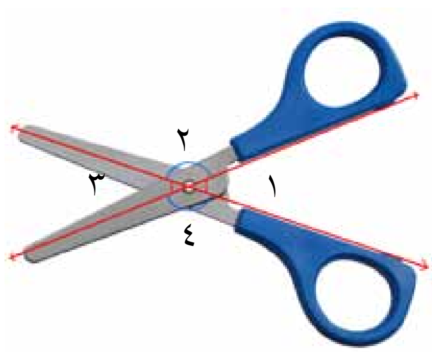
الزاويتانِ المتقابلتانِ بالرّأسِ هما الزاويتانِ غيرُ المتجاورتينِ الناتجتانِ مِنْ تقاطعِ خطّينِ مستقيمينِ.

مثلاً في الشكل المجاور:

∢ ١ وَ ∢ ٣ زاويتانِ متقابلتانِ بالرّأسِ.

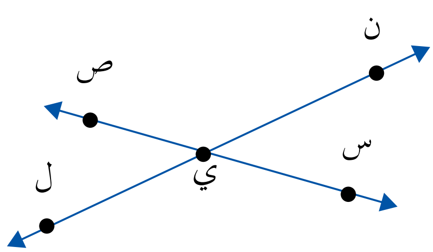
∢ ٢ وَ ∢ ٤ زاويتانِ متقابلتانِ بالرّأسِ.

تحدّثْ: ما علاقةُ ∢ ١، ∢ ٢، ∢ ٣، ∢ ٤ بعضهم بعضًا؟



نشاطُ (٢)

١) في الشّكلِ المجاورِ خطّانِ مستقيمانِ $\overleftrightarrow{\text{ن ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يتقاطعانِ في النقطةِ ي.

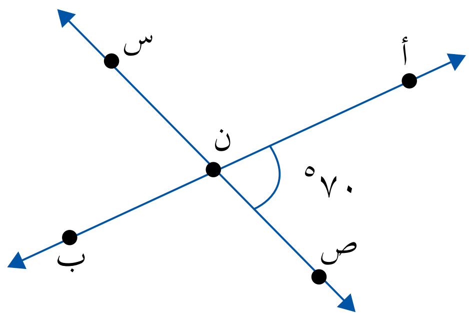


٢) استخدمِ المنقلةَ لقياسِ ∢ ن ي س، ∢ ص ي ل.
ماذا تستنتجُ؟

٣) استخدمِ المنقلةَ لقياسِ ∢ ن ي ص ، ∢ س ي ل. ماذا تستنتجُ؟

الزوايا المتقابلةُ بالرّأسِ متساويةٌ في القياسِ.

مثالُ (٢)



في الشّكلِ المجاورِ المستقيمانِ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مستقيمانِ متقاطعانِ، ن نقطةُ تقاطعهما، وقياسُ ∡ أ ن ص = ٧٠°.

جِدْ ق ∡ ص ن ب ، ق ∡ ب ن س، ق ∡ أ ن س.

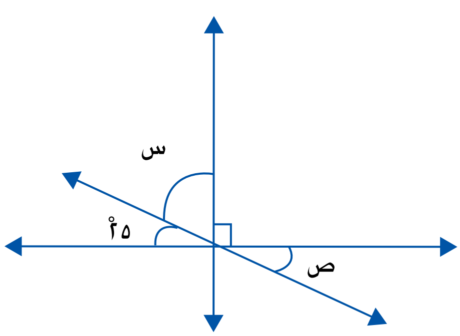
الحلُّ

ق ∡ ص ن ب = ١٨٠°−٧٠° = ١١٠° زوايا متجاورةٌ على قطعةٍ مستقيمةٍ

ق ∡ س ن ب = ٧٠° بالتقابلِ بالرّأسِ مع ∡ أ ن ص

ق ∡ أ ن س = ١١٠° بالتقابلِ بالرّأسِ مع ∡ ص ن ب

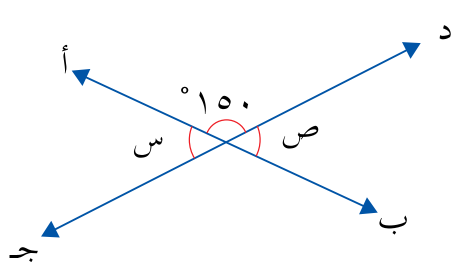
تدريب ٣



أوجدْ ق ∡ س، ق ∡ ص في الشّكلِ المجاورِ:

• قارنِ الاختلافاتِ بينَ الزاويا المتقابلةِ بالرّأسِ، والزوايا المتجاورةِ.

تدريب ٤

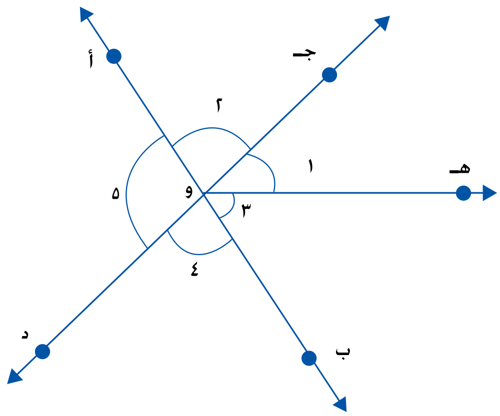


* في الشّكلِ المجاورِ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيمانِ متقاطعانِ

ما قيمةُ ق ∡ س+ق ∡ ص ؟

* السّؤالُ مِنْ أسئلةِ الاختباراتِ الدّوليةِ.

تمارينُ ومسائلُ



١) معتمدًا الشّكلَ المجاورَ، أجبْ عمّا يأتي:

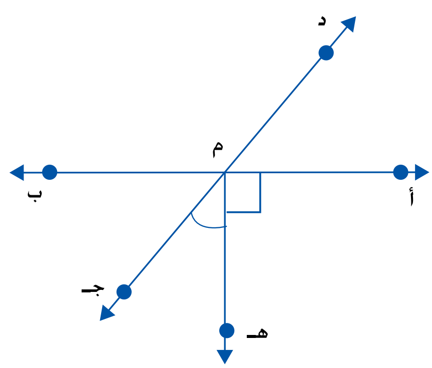
أ) هـلْ ∢ ١ متجـاورةٌ معَ ∢ ٢؟ اذكـرِ السّببَ.

ب) هلْ ∢أ و جـ متجاورةٌ معَ ∢أ و هـ ؟ اذكرِ السّببَ.

جـ) هلْ ∢ جـ و ب، وَ ∢ ب و د تمثّلانِ زوجًا مِنَ الزوايا المتجاورةِ على قطعةٍ مستقيمةٍ؟

د) هلْ ∢ ١ متقابلةٌ بالرّأسِ معَ ∢ ٤؟

هـ) ما الزاويةُ التي تقابلُ ∢ ٥ بالرأسِ؟



٢) في الشّكلِ المجاور إذا كانَ:

ق ∢ جـ م ب = ٥٠°، جِدْ كُلاًّ مِنْ:

ق ∢ د م أ

ق ∢أ م ب

ق ∢ هـ م جـ

٣) أيُّ الجملِ الآتية صحيحةٌ؟ ارسمْ شكلًا يوضّحُ الجملةَ إذا كانتْ صحيحةً، واذكرِ السّببَ إذا كانتْ غيرَ صحيحةٍ:

أ) يمكنُ أنْ تكونَ الزاويتانِ المستقيمتانِ متقابلتينِ بالرّأسِ.

ب) يمكنُ أنْ تكونَ الزاويتانِ المستقيمتانِ متجاورتينِ.

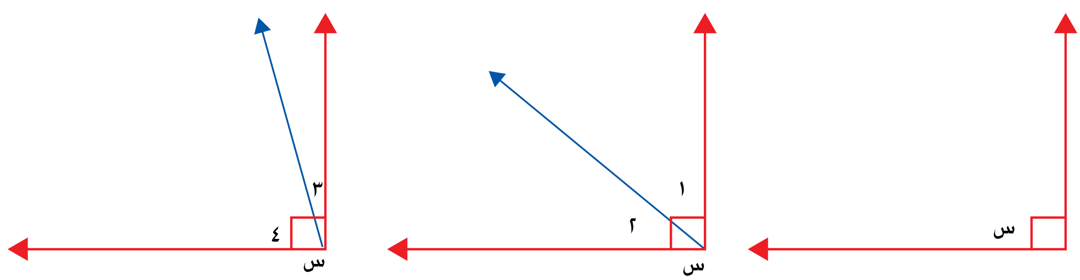
الدرسُ الثّاني الزّوايا المتتامّةُ والزّوايا المتكاملةُ

النتاجات

- تحددُ قياساتِ زوايا متتامّةٍ، ومتكاملةٍ في رسومٍ هندسيّةٍ، باستخدامِ التّبريرِ الرّياضيّ.

نشاطٌ (١)

بالرّجوعِ للزّاويةِ س في الشّكلِ الآتي، أجبْ عنِ الأسئلةِ التي تليه:



١) ما نوعُ الزّاويةِ س (حادّة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)؟

٢) قُمْ برسمِ الزّاويةِ على ورقةٍ، ثُمّ قُمْ بطيِّ الورقةِ للحصولِ على زاويتينِ متطابقتينِ، وسمّهما ∡ ١، ∡ ٢.

٣) باستخدامِ المنقلةِ قُمْ بقياسِ كلٍّ مِنَ الزاويتينِ ∡ ١، ∡ ٢.

٤) ما مجموعُ قياسِ الزاويتينِ ∡ ١ ، ∡ ٢؟

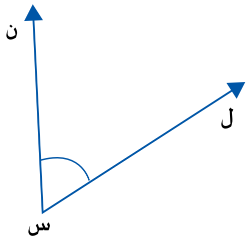
٥) كرّرِ الخطواتِ السابقةَ برَسمِ شعاعٍ يقسِّمُ ∡س إلى زاويتينِ مختلفتينِ.

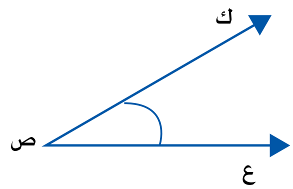
٦) باستخدامِ المنقلةِ قُمْ بقياسِ كُلٍّ مِنَ الزاويتينِ.

٧) ما مجموعُ قياسِ الزاويتينِ ؟

اكتبِ استنتاجكَ، وناقشْهُ معَ زميلكَ.

تُسمّى أزواجُ الزوايا التي مجموعُ قياساتها ٩٠° زوايا متتامّةً.





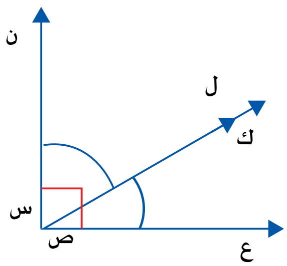
إذا كانَ ق ∡ ك ص ع = ٣٠°

ق ∡ ن س ل= ٦٠°

فإنَّ :

ق ∡ ك ص ع + ق ∡ ن س ل =

٣٠°+ ٦٠°= ٩٠° إذنْ: الزاويتانِ متتامّتانِ.



فكّر وناقش

- هلْ مِنَ الضروريِّ أن تكونَ الزوايا المتتامّةُ متجاورةً؟
- هلْ مِنَ الضروريِّ أنْ تكونَ الزوايا المتجاورةُ متتامّةً؟

نشاطُ (٢)

١) ارسمْ زاويةً مستقيمةً وسمّها ص، كما في الشّكلِ المجاورِ.

٢) ارسمْ شعاعًا يقسّمها إلى زاويتينِ، وسمّهما ∡ ١، ∡ ٢.

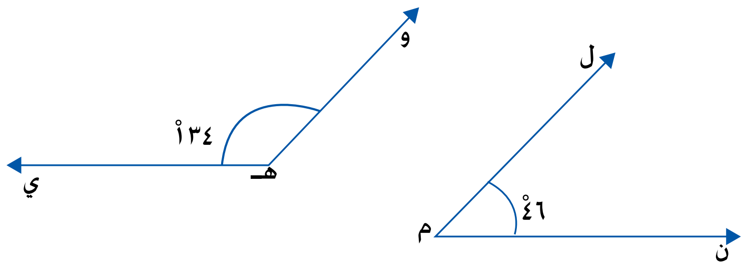
٣) قمْ بقياسِ الزاويتينِ باستخدامِ المنقلةِ، ما مجموعُ قياسِ الزاويتينِ؟

٤) كرّرِ الخطواتِ السّابقةَ للحصولِ على زاويتينِ مختلفتينِ بالقياسِ.

٥) قمْ بقياسِ الزاويتينِ باستخدامِ المنقلةِ، ثمّ جِدْ مجموعَ قياسهما. ماذا تستنتجُ؟

تُسمّى أزواجُ الزوايا التي مجموعُ قياساتها ١٨٠° زوايا متكاملةً.

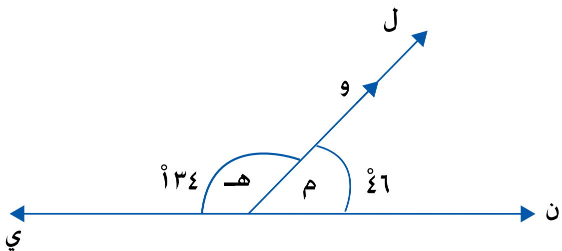
فمثلًا:



إذا كانَ ق ∡ ن م ل = ٤٦°

ق ∡ و هـ ي = ١٣٤°

فإنَّ:



ق ∡ ن م ل + ق ∡ و هـ ي =

٤٦° + ١٣٤° = ١٨٠°

إذنْ: الزاويتانِ متكاملتانِ.

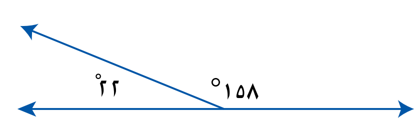
فكّر وناقش

١) هلْ مِنَ الضروريِّ أنْ تكونَ الزوايا المتكاملةُ متجاورةً؟

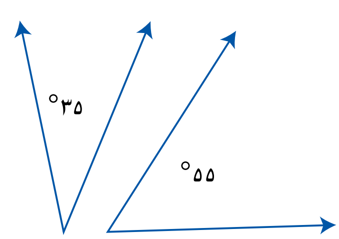
٢) هلْ مِنَ الضروريِّ أنْ تكونَ الزوايا المتجاورةُ متكاملةً؟

مثالُ (١)

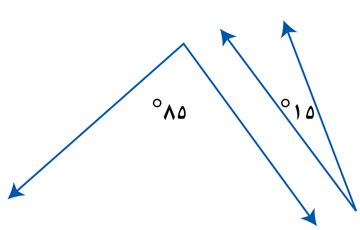
حدّدْ: أيُّ أزواجِ الزوايا الآتيةِ متتامّةٌ، أو متكاملةٌ، أو غيرُ ذلكَ؟ معَ ذِكْرِ السّببِ.



(١)



(٢)



(٣)

الحلُّ

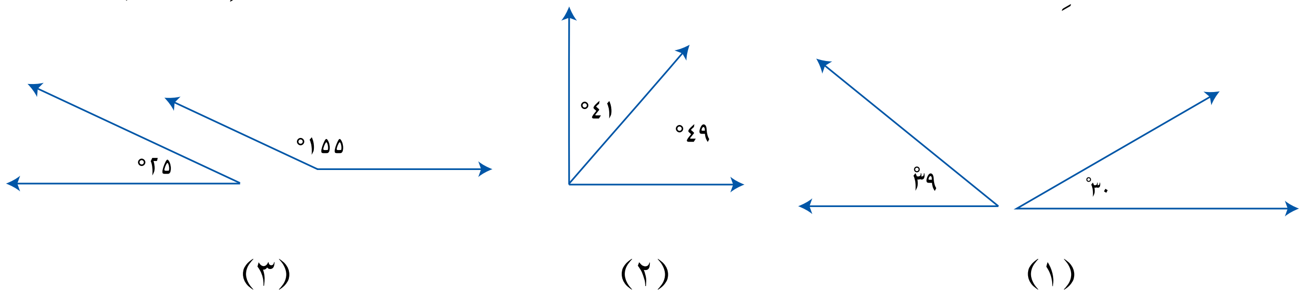
١) زاويتانِ متكاملتانِ؛ السّببُ: ١٥٨°+ ٢٢° = ١٨٠°

٢) زاويتانِ متتامّتانِ؛ السّببُ : ٥٥°+ ٣٥°= ٩٠°

٣) زاويتانِ .... ، السبّبُ ....

تدريبُ ١

حدّدْ: أيُّ أزواجِ الزوايا الآتيةِ متتامّةٌ، أو متكاملةٌ، أو غيرُ ذلكَ؟ معَ ذِكْرِ السّببِ.



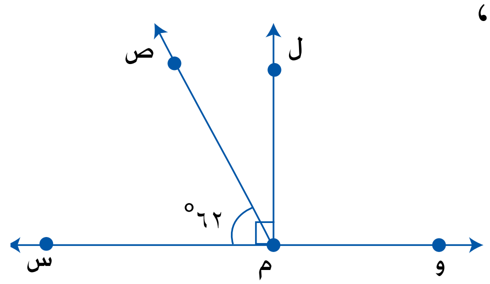
تدريبُ ٢

مروحةٌ يدويّةٌ قابلةٌ للطيِّ، تشكّلُ زاويةً مستقيمةً عندَ فتحِها بالكاملِ، إذا فُتِحتِ المروحةُ إلى زاويةِ ١٣٥°، فما قياسُ الزاويةِ المتبقيةِ لفتحِها بشكلٍ كاملٍ؟

مثالُ (٢)

في الشّكلِ المجاورِ، إذا كانتْ ∡ ل م س زاويةً قائمةً، ق ∡ ص م س = ٦٢°، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:

١) ق ∡ ل م و　　　　٢) ق ∡ ص م ل



الحلُّ

١) ق ∡س م ل + ق ∡ ل م و = ١٨٠°

لأنهما...............

٩٠° + ق ∡ ل م و = ١٨٠°

ق ∡ ل م و = ١٨٠° − ٩٠°

ق ∡ ل م و = ٩٠°

٢) ق ∡س م ص + ق ∡ص م ل = ٩٠°؛ لأنهما ....

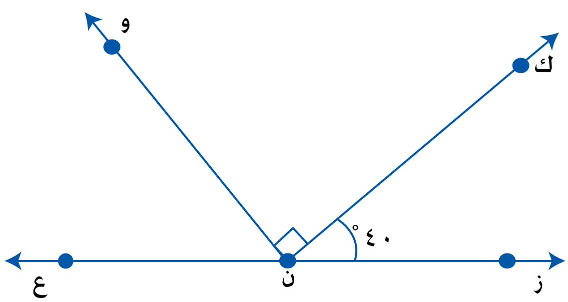
٦٢° + ق ∡ص م ل = ٩٠°

ق ∡ص م ل = ٩٠° − ٦٢°

ق ∡ص م ل = ٢٨°

تدريبُ ٣

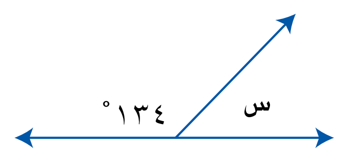
في الشّكلِ المجاورِ ن و ⊥ ن ك ، ∡ز ن ع زاويةٌ مستقيمةٌ ، ق ∡ك ن ز = ٤٠° جِدْ ق ∡و ن ع

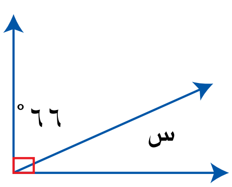


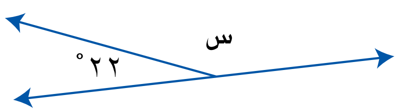
تمارينُ ومسائلُ

١) حدّدْ أزواجَ الزوايا المتتامّةِ والزوايا المتكاملةِ في الشّكلِ المجاورِ.

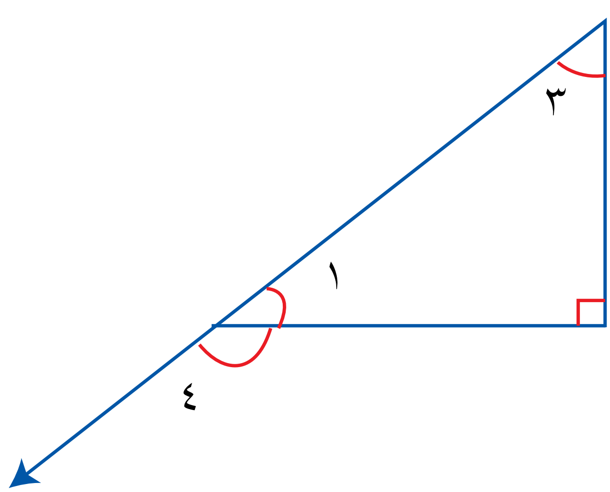
٢) صنّفْ أزواجَ الزوايا الآتيةِ إلى زوايا متتامّةٍ، أو زوايا متكاملةٍ، ثُمَّ جدْ قياسَ الزوايا المجهولةِ.







٣) في الشّكلِ المجاورِ، إذا كانَ ق ∡٣= ٥٥°، جِدْ كلاًّ مِنْ: ق ∡ ١ ، ق ∡ ٤



٤) إذا كانتْ ع زاويةً قياسها ٥٠°، فما قياسُ متمّمتها؟

٥) أ) إذا علمتَ أنَّ: ∡ ع متتامّةٌ معَ ∡ك ، وَ ق ∡ ع = ٤٧°. فما ق ∡ك؟

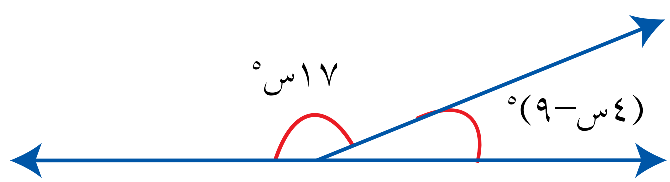
ب) إذا علمتَ أنَّ ∡ م متكاملةٌ معَ ∡ ن، وَ ق ∡ ن = ٣٦°. فما ق ∡م؟

٦) حدّدْ: أيُّ أزواجِ الزوايا الآتيةِ متتامةٌ أو متكاملةٌ أو غيرُ ذلكَ؟ معَ ذِكْرِ السّببِ:

أ) (٥٠°، ٧٠°)　　　ب) (١٤٥°، ٦٠°)

جـ) (١٥٢°، ٢٨°)　　　د) (١٦°، ٧٤°)

٧) في الشّكلِ الآتي جِدْ قيمةَ س.

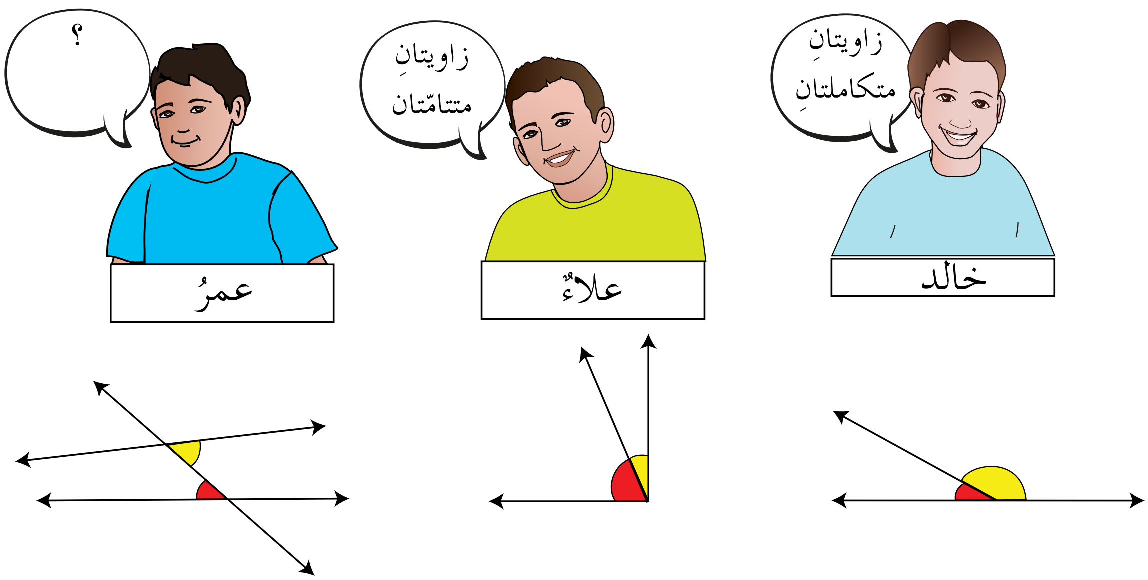


الدرسُ الثّالثُ
الزوايا المتناظرةُ، والزوايا المتبادلةُ والزوايا المتحالفةُ

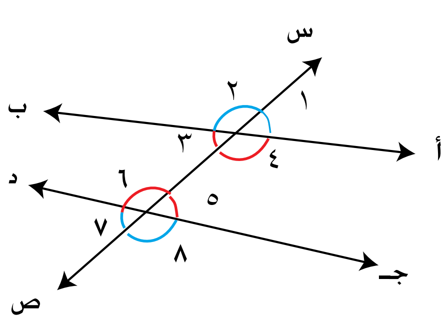
النتاجات

- تحدّدُ قياساتِ زوايا متناظرةٍ، ومتبادلةٍ ومتحالفةٍ في رسومٍ هندسيّةٍ، باستخدامِ التّبريرِ الرياضيِّ.

رسمَ المعلمُ ثلاثةَ أشكالٍ لزوايا على السبورة، وكلّفَ الطلبةَ بتحديدِ العلاقةِ بينَ الزوايا في كلِّ شكلٍ، فكانتْ إجاباتهم كما يأتي:



لمساعدةِ عُمَرَ في إيجادِ العلاقةِ بينَ الزاويتينِ، تأمّلِ الشّكلَ المجاورَ:



المستقيمُ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ قطعَ المستقيمينِ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

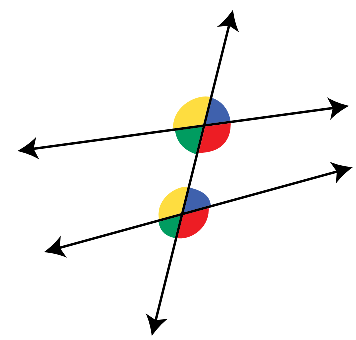
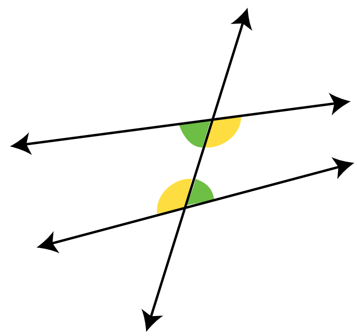
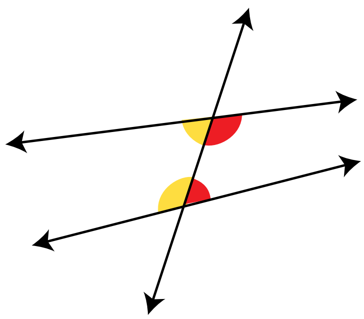
ونتجَ عنْ هذا التّقاطعِ: (٨) زوايا مختلفةٍ تصنّفُ هذه الزوايا في مجموعتينِ مختلفتينِ هما:

زوايا داخليّةٌ: هي الزوايا التي تقعُ داخلَ المستقيمَينِ وهي:

∡٣ ، ∡٤، ∡٥ ، ∡٦

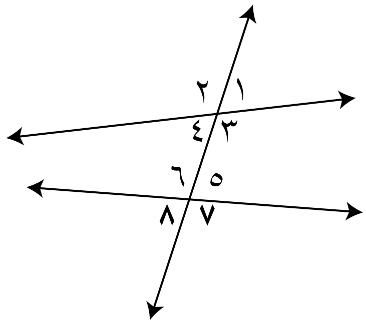
زوايا خارجيّةٌ: وهي الزوايا التي تقعُ خارجَ المستقيمَينِ وهي: ∡١ ، ∡٢، ∡٧، ∡٨

ويمكنُ تصنيفُ هذه الزوايا إلى ثلاثةِ أنواعٍ كما يأتي:

زوايا متناظرةٌ	زوايا متبادِلةٌ	زوايا متحالِفةٌ
		
الـزوايا المتناظرةُ: هي أزواجٌ مِنَ الـزوايـا إحـداهـا داخليـةٌ، والأخـــرى خارجيـــةٌ، غيـرُ متجــاورةٍ، تقــعُ على نفسِ الجهــةِ للمستقيـمِ القاطعِ. مثالٌ: أزواجُ الزوايا الملونةِ باللـــونِ الأزرقِ متـنـاظـرةٌ، وأزواجُ الزوايا الملوّنةِ باللّونِ الأحمرِ متناظرةٌ. هــل يمكـــنُ تحديـدُ أزواجٍ أُخرى؟ ما هي؟	الزوايـــا المتبادلـــةُ: هي أزواجٌ مِنَ الزوايا الداخليّةِ غيـــرِ المتجـــاورةِ، تقـــعُ عــلى جهتيــنِ مختلفتيــنِ للمستقيمِ القاطعِ. مثـــالٌ: أزواجُ الزوايـــا الملونـــةِ بالـلّونِ الأخضرِ متبادلةٌ. هلْ يمكنُ تحديدُ أزواجٍ أخرى؟ ما هي؟	الزوايـــا المتحالفـةُ: هي أزواجٌ مِنَ الزوايا الداخليّةِ غيرِ المتجاورةِ، تقعُ على نَـفْسِ الجهــةِ للمستقيـمِ القاطعِ. مثالٌ: أزواجُ الزوايا الملونةِ باللونِ الأصفرِ متحالفةٌ. هل يمكـنُ تحديـدُ أزواجٍ أخرى؟ ما هي؟

مثالُ (١)

صنّفِ العلاقةَ بينَ أزواجِ الزوايا الآتيةِ إلى: تناظرٍ، وتبادلٍ، وتحالفٍ، معَ ذِكْرِ السّببِ:



١) (∡١، ∡٥)

٢) (∡٣، ∡٦)

٣) (∡٨، ∡٤)

٤) (∡٣، ∡٥)

الحلُّ

١) (∡١ ، ∡٥) زوايتانِ متناظرتانِ؛ لأنّهما تقعانِ على نفسِ الجهةِ للمستقيمِ القاطعِ، إحداهما داخليةٌ، والأخرى خارجيةٌ وغير متجاورة.

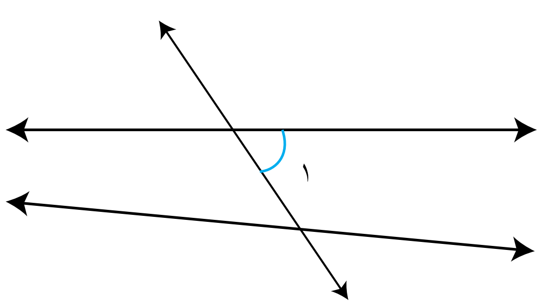
٢) (∡٣، ∡٦) زوايتانِ متبادلتانِ؛ لأنّهما ....

٣) (∡٨، ∡٤) زوايتانِ متناظرتانِ؛ لأنّهما ....

٤) (∡٣، ∡٥) زوايتانِ متحالفتانِ؛ لأنّهما ....

تدريبُ (١)

عيّنِ الزوايا ∡٢، ∡٣، ∡٤ ، ∡٥ على الشّكلِ المجاورِ:معتمدًا على العلاقةِ بينَ أزواجِ الزوايا في ما يأتي:



∡٢ تُبادلُ ∡١

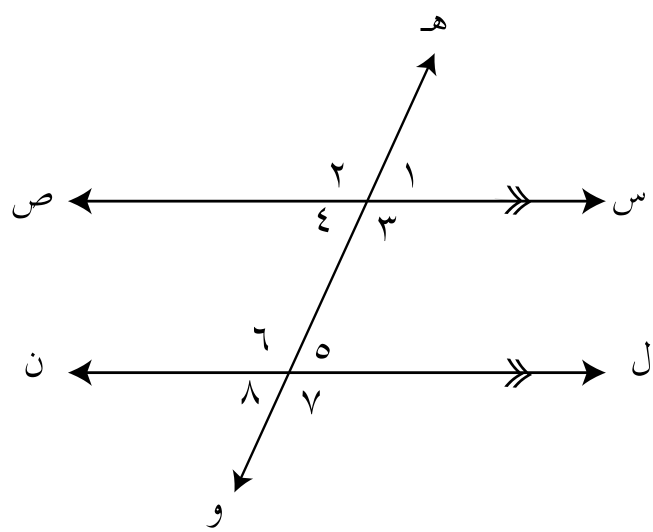
∡٣ تُناظرُ ∡١

∡٤ تُحالفُ ∡٢

∡٥ تُناظرُ ∡٤

نشاطٌ

مستعينًا بالشّكلِ الآتي إذا علمتَ أنَّ س ص يوازي ل ن وكان هـ و قاطعًا لهما، أكملِ الجدولَ الذي يليه:



الزوايا	باستخدامِ المنقلةِ جِدْ قياسَ	العلاقةُ بينَ أَزواجِ الزوايا
∡١، ∡٥	∡١ = ∡٥ =	
∡٣، ∡٦	∡٣ = ∡٦ =	
∡٣، ∡٥	∡٣ + ∡٥ =	

ناقشْ معَ زميلكَ ما توصّلتَ إليهِ.

إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمينِ متوازيينِ فإنَّ:

أزواجَ الزوايا المتبادلةِ الناتجةِ عنْ هذا التّقاطعِ متطابقةٌ ومتساويةٌ بالقياسِ.

أزواجَ الزوايا المتناظرةِ النّاتجةِ عنْ هذا التّقاطعِ متطابقةٌ، ومتساويةٌ بالقياسِ.

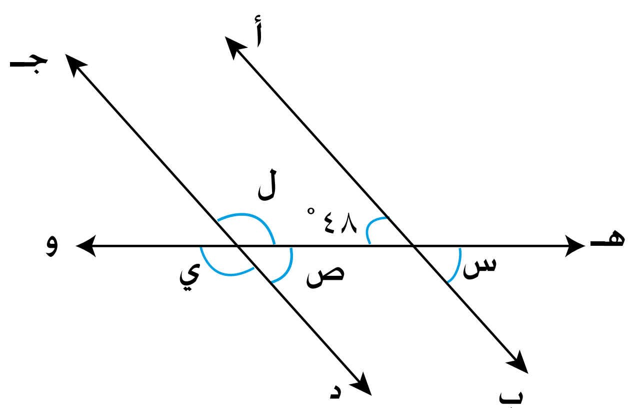
مجموعَ قياسِ أزواجِ الزوايا المتحالفةِ النّاتجةِ عنْ هذا التّقاطعِ يساوي ١٨٠°.

مثالُ (٢)

إذا كانَ أ ب // جـ د ، وكان هـ و قاطعًا لهما كما في الشّكلِ الآتي.

جِدْ ق ∢ص ، ق ∢س ، ق ∢ل ، ق ∢ ي، برّرْ إجابتكَ.

الحلُّ



ق ∢ص = ٤٨° (بالتبادلِ معَ ∢ ٤٨°)

ق ∢س = ٤٨° (بالتناظرِ معَ ∢ص،

أو بالتقابلِ بالرأسِ معَ ∢٤٨°)

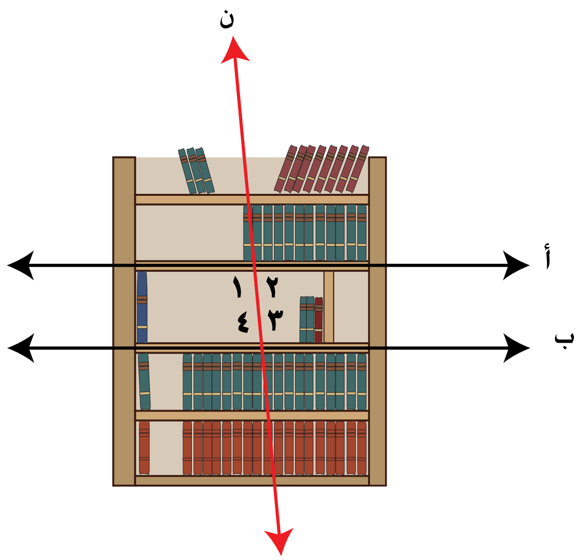
ق ∢ل = ١٨٠° − ٤٨° = ١٣٢° (بالتحالفِ معَ ∢٤٨°)

ق∢ي = ١٣٢° (بالتقابلِ بالرّأسِ معَ ∢ل)

هلْ تستطيعُ حَلَّ المثالِ بطريقةٍ أخرى؟

تدريبُ ٢

صَمَّمَ مصمّمُ أثاثٍ خزانةَ الكتبِ المبيّنةَ في الشّكلِ المجاور. إذا كانَ المستقيمُ $\overleftrightarrow{\text{أ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب}}$، والمستقيمُ $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ قاطعًا لهما.



١) بيّنْ نوعَ العلاقةِ بينَ ∡ ٢ ، ∡ ٤ .

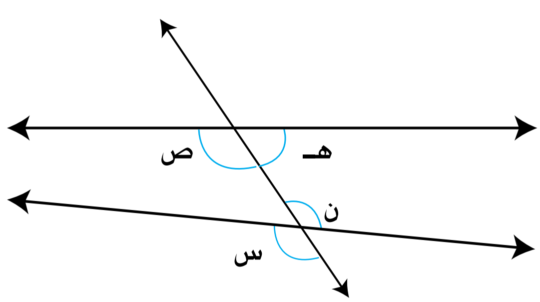
٢) إذا كانَ ق ∡ ١ = ٩٥°

جِدْ: ق ∡ ٢ ، ق ∡ ٤، ق ∡ ٣.

برّرْ أجابتكَ.

فكّر وناقش

معتمدًا الشكلَ المجاورَ اكتشفِ الخطأَ الذي ارتكبهُ عليٌّ وسليمٌ وإيمانُ:



كتبَ عليٌّ: ق ∡ س = ق ∡ ص

(لأنّهما متناظرتان)

كتبَ سليمٌ: ق ∡ ن = ق ∡ ص

(لأنّهما متبادلتان)

كتبتْ إيمانُ: ق ∡ هـ + ق ∡ ن = ١٨٠°

(لأنّهما متحالفتان)

ناقشْ معَ زملائكَ الأخطاءَ الواردةَ أعلاهُ.

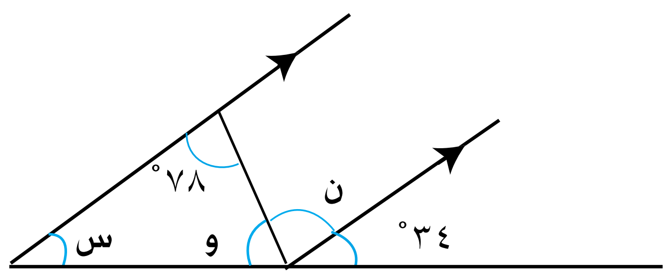
تمارينُ ومسائلُ

١) معتمدًا الشّكلَ الآتي، إذا علمتَ أنَّ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ فأجبْ عمّا يليه:

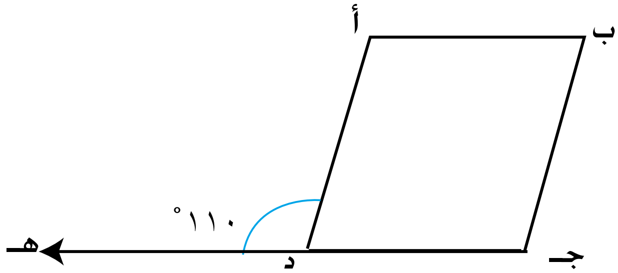
أ) صنّفِ العلاقةَ بينَ الزاويتينِ ∢١ ، ∢٢

ب) إذا كانَ ق ∢٣ = ٤٠°، جد ق ∢١، ق ∢٢

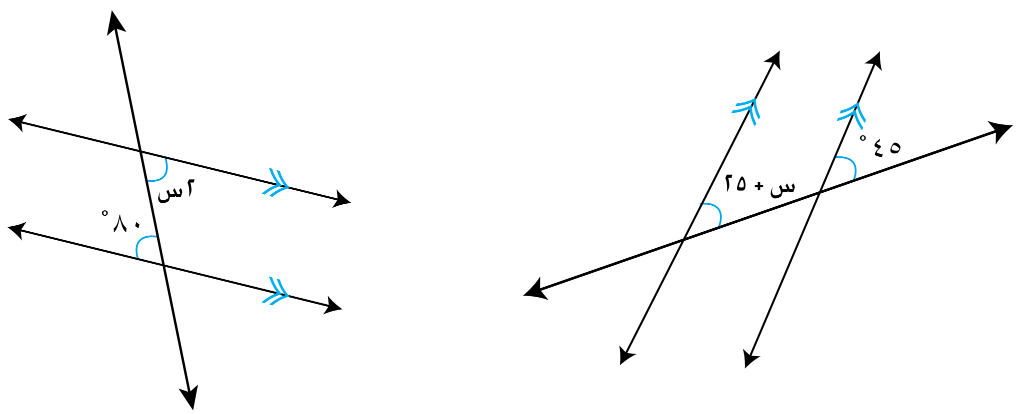
٢) في الشّكلِ الآتي، جدْ قياسَ ∢و ،∢ن، ∢س. برّرْ إجابتكَ.



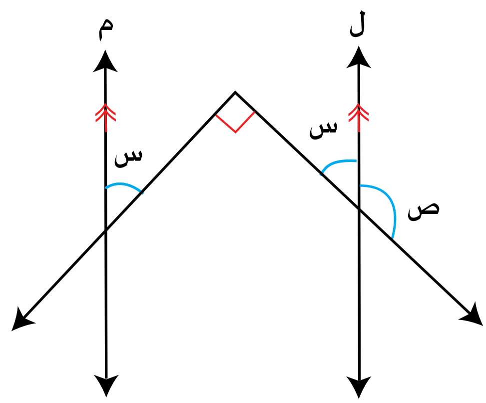
٣) يمثّلُ الشّكـلُ الآتي متـوازي الأضلاعِ أ ب جـ د ، إذا مُـدَّ الضلـعُ جـ د إلى النقطةِ هـ. جِدْ ق ∢أ ب جـ. برّرْ إجابتكَ.



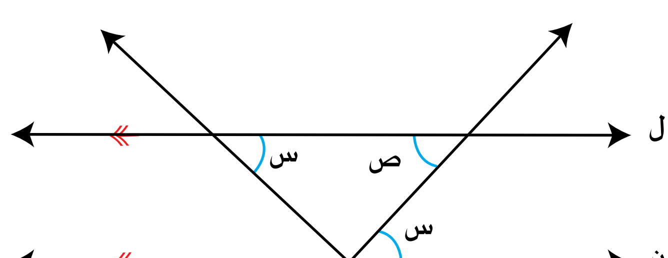
٤) معتمدًا الشكلينِ الآتيينِ، جد قيمةَ س:



٥) في الشّكلَ الآتي، إذا كانَ المستقيمانِ: $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ متوازيَينِ جدْ ق ∢س ، ق ∢ص.



٦) معتمدًا الشكلَ الآتي إذا كانَ المستقيمانِ: $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ متوازيينِ، فسّرْ لماذا $\frac{\text{ق}\angle\text{س}}{\text{ق}\angle\text{ص}}$ = ١؟



الدرسُ الرّابعُ اختبارُ توازي مستقيمينِ

النتاجات

- تختبرُ توازي مستقيماتٍ باستخدامِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

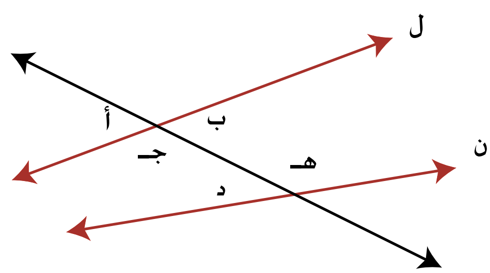
إذا أردتَ صناعةَ بوّابةٍ مِنَ الخشبِ، كيفَ يمكنكَ التّأكدُ مِنْ أنَّ قِطعَ الأخشابِ توازي بعضَها بعضًا؟

نشاطٌ

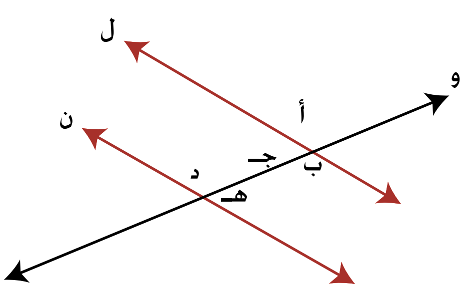
ليكنْ $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ن}$ مستقيمينِ يقعانِ في نَفْسِ المستوى، وليكنِ المستقيمُ $\overleftrightarrow{و}$ قاطعًا لهما.

باستخدامِ المَنقلةِ جِدْ قياسَ الزوايا المجهولةِ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ، ثُمَّ أكملِ الجدولِ الذي يلي الأشكالَ:

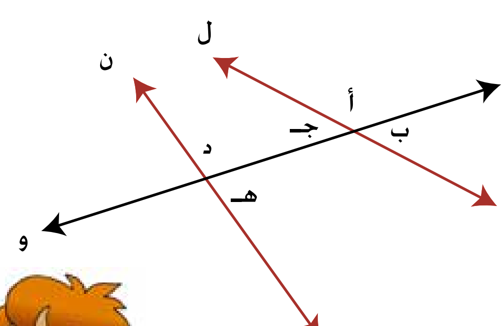
١)



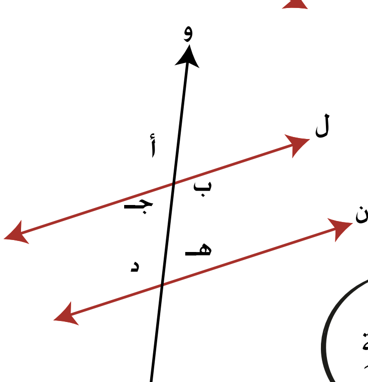
٢)



٣)



٤)

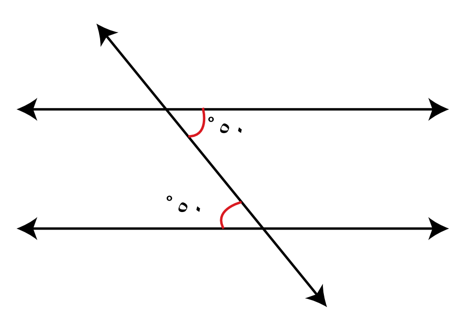


الشّكلُ	ما العلاقةُ بينَ الزاويتينِ أ ، د ؟	ما العلاقةُ بينَ الزاويتينِ جـ ،هـ؟	ما العلاقةُ بينَ الزوايا جـ ، د ؟	ما العلاقةُ بينَ المستقيمينِ ل، ن؟
١	قياسُ زاويةِ أ=.... قياسُ زاويةِ د = ...	قياسُ زاويةِ جـ=.... قياسُ زاويةِ هـ=...	قياسُ زاويةِ جـ = ... قياسُ زاويةِ د = ...	
٢	قياسُ زاويةِ أ=.... قياسُ زاويةِ د = ...	قياسُ زاويةِ جـ=.... قياسُ زاويةِ هـ=....	قياسُ زاويةِ جـ = ... قياسُ زاويةِ د = ...	
٣	قياسُ زاويةِ أ=.... قياسُ زاويةِ د = ...	قياسُ زاويةِ جـ=.... قياسُ زاويةِ هـ=...	قياسُ زاويةِ جـ = ... قياسُ زاويةِ د = ...	
٤	قياسُ زاويةِ أ=.... قياسُ زاويةِ د = ...	قياسُ زاويةِ جـ=.... قياسُ زاويةِ هـ=...	قياسُ زاويةِ جـ = ... قياسُ زاويةِ د = ...	

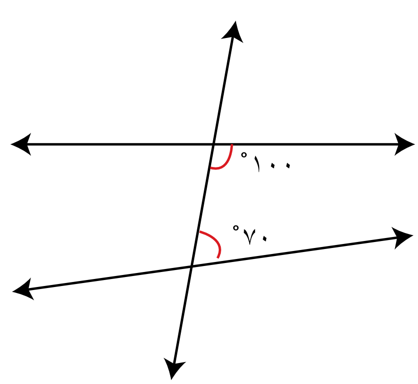
ناقشْ ما توصلتَ إليهِ مِنْ نتائجَ معَ زملائكَ، ثُمَّ اكتبِ استنتاجكَ؟

مثالُ (١)

هلِ المستقيماتُ الآتيةُ متوازيةٌ؟ بّررْ إجابتكَ.



شكل (١)



شكل (٢)

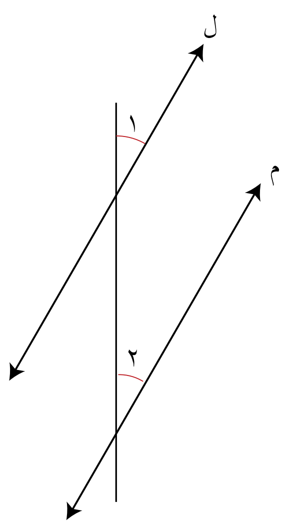
الحلُّ

١) في الشكلِ (١) الزاويتانِ المحصورتانِ بينَ المستقيمينِ متبادلتانِ، ومتساويتانِ في القياسِ، إذنْ: المستقيمانِ متوازيانِ.

٢) في الشكلِ (٢) مجموعُ قياسِ الزاويتينِ المتحالفتينِ المحصورتينِ بينَ المستقيمينِ يساوي ١٧٠°، إذنْ: المستقيمانِ غيرُ متوازيين.

- إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمَينِ، ووُجدَ زوجٌ مِنَ الزوايا المتبادلةِ، متساويًا في القياسِ، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.
- إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمَينِ، ووُجدَ زوجٌ مِنَ الزوايا المتناظرةِ متساويًا في القياسِ، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.
- إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمَينِ، ووُجدَ مجموعُ قياسِ زوجٍ مِنَ الزوايا المتحالفةِ يساوي ١٨٠°، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.

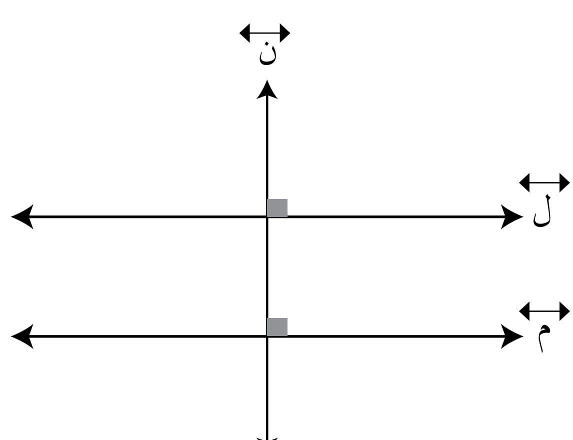
تدريبُ ١



مِنَ الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ ق∢١ = ق∢٢ = ٣٠°
فهلِ المستقيمانِ ل ، م متوازيانِ؟ برّرْ إجابتكَ.

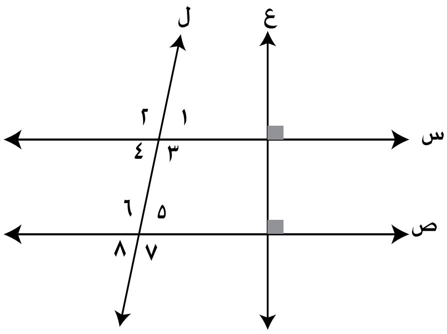
تدريبُ ٢

انظرْ إلى الشكلِ الآتي، ثُمّ أثبتْ أنّهُ إذا كانَ $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{م}$ فإنَّ: $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{م}$.



تمارينُ ومسائلُ

١) مستعينًا بالشّكلِ المجاورِ، أكملِ الفراغاتِ الآتيةَ للحصولِ على عباراتٍ صحيحةٍ:



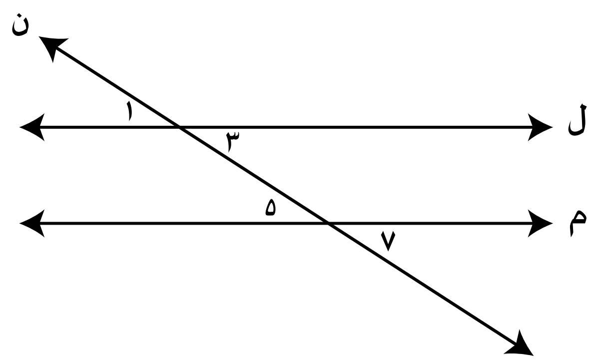
المستقيمانِ $\overleftrightarrow{\text{س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص}}$ ....

المستقيمانِ $\overleftrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س}}$ ....

∡٣، ∡٤ زاويتانِ .... ومجموع قياسهما ......

∡٢، ∡٦ زاويتانِ ..... وقياسيهما ....

٢) في الشكلِ الآتي إذا كانَ ق ∡١ = ق ∡٧. أثبتْ أنَّ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م}}$.

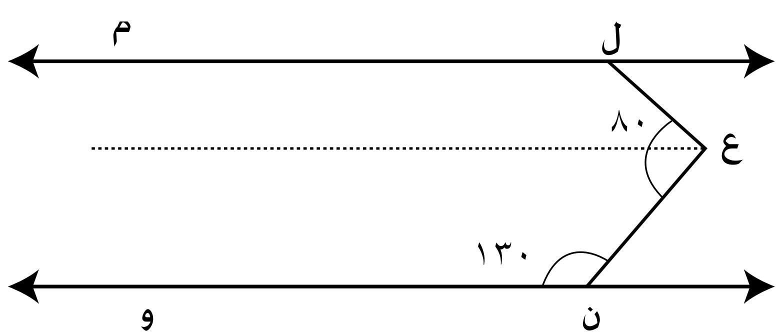


٣) في الشّكلِ الآتي المستقيمُ $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{و ن}}$.

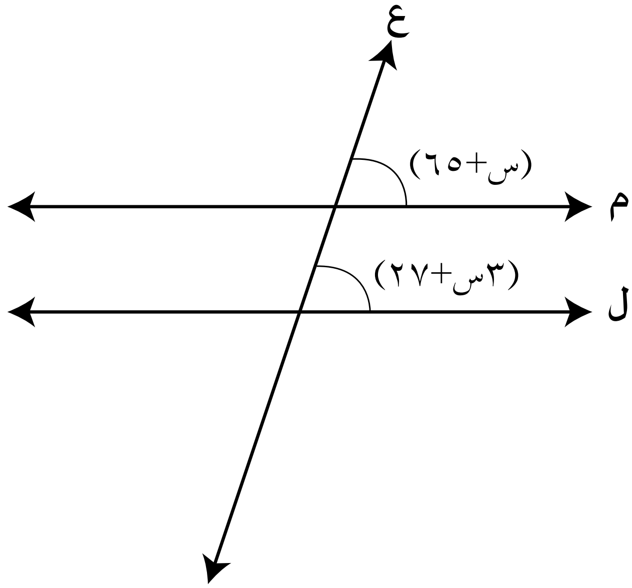
إذا كانَ ق ∡و ن ع = ١٣٠°

وَق ∡ل ع ن= ٨٠°

جِدْ ق ∡ع ل م .



٤) في الشكلِ الآتي إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ وَ $\overleftrightarrow{\text{ع}}$ قاطعًا لهما. فما قيمةُ س؟



الدرس الخامسُ

أنواعُ المثلّثاتِ

النتاجات

- تصنّفُ المثلثاتِ حَسْبَ أطوالِ أضلاعها، وقياساتِ زواياها.

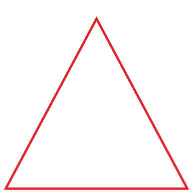
تُستخدمُ أنواعٌ كثيرةٌ مِنَ الأشكالِ في بناءِ الجسورِ، ومِنْ هذهِ الأشكالِ المثلّثاتُ، إذ تُعطي قوّةً للجسرِ، وتُضفي عليهِ صفةً جماليّةً، فما هو المثلّثُ، وهلْ توجدُ أنواعٌ للمثلّثاتِ؟

المثلّثُ: هو اتحادُ ثلاثِ قطعٍ مستقيمةٍ تتقاطعُ، كلُّ اثنتينِ منها في نقطةٍ واحدةٍ.

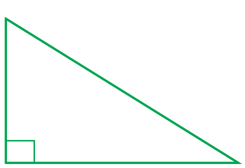
يمكنُ تصنيفُ المثلّثاتِ حَسْبَ قياسِ الزوايا، وحَسَبَ أطوالِ الأضلاعِ على النّحوِ الآتي:

أولًا: حَسْبَ قياساتِ الزوايا، ويصنّفُ إلى ثلاثةِ أنواعٍ، هي:

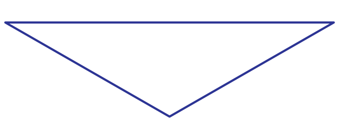
١) (مثلّثٌ حادُّ الزوايا) كلُّ زواياهُ حادّةٌ.



٢) (مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ) فيهِ زاويةٌ قائمةٌ.



٣) (مثلّثٌ منفرِجُ الزاويةِ) فيهِ زاويةٌ منفرجةٌ.



تذكّرْ :

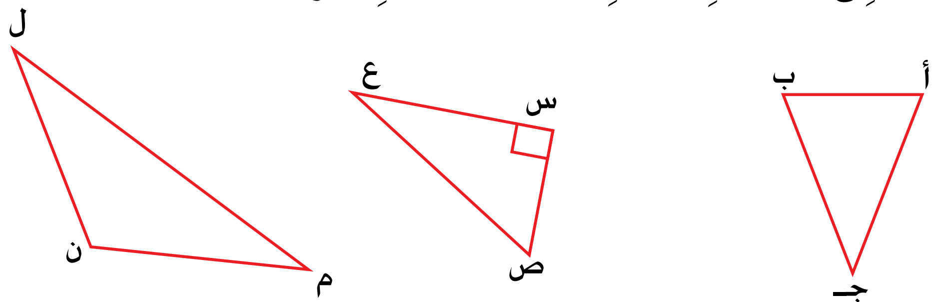
قياسَ الزاويةِ الحادّةِ أكبرُ مِنْ ٠°، وأقلُّ من ٩٠°.

قياسَ الزاويةِ القائمةِ يساوي ٩٠°.

قياسَ الزاويةِ المنفرِجةِ أكبرُ مِنْ ٩٠°، وأقلُّ مِنْ ١٨٠°.

مثالُ (١)

صنّفْ كلًّا مِنَ المثلّثاتِ الآتيةِ حَسْبَ قياساتِ زواياهُ:



(١) (٢) (٣)

الحلُّ

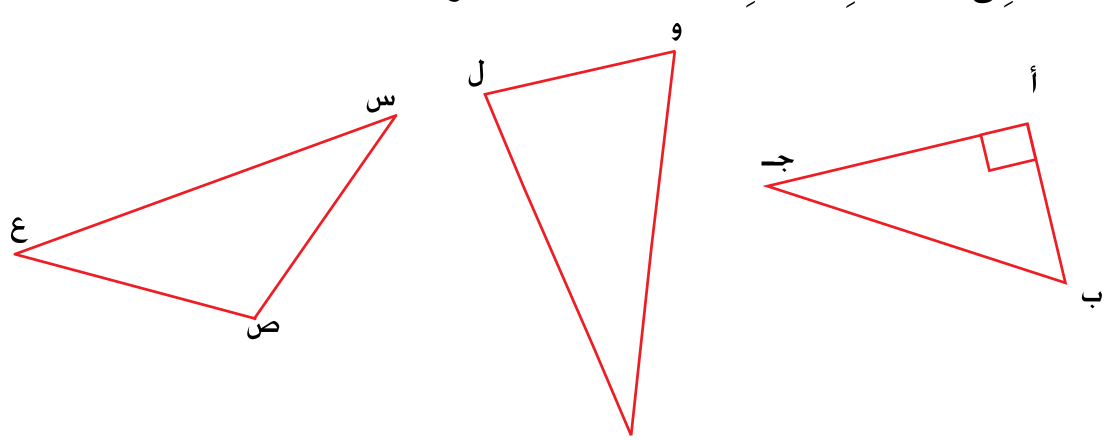
المثلّثُ (١) حادُّ الزوايا؛ لأنَّ جميعَ زواياهُ حادّةٌ.

المثلّثُ (٢) قائمُ الزّاويةِ؛ لأنَّ فيهِ زاويةً قائمةً.

المثلّثُ (٣) منفرجُ الزاويةِ؛ لأنّ فيهِ زاويةً منفرجةً.

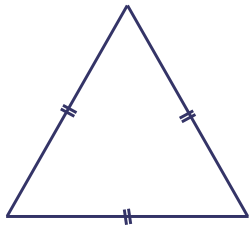
تدريبُ ١

صنّفْ كلًّا مِنَ المثلّثاتِ الآتيةِ حَسْبَ قياسات زواياه:

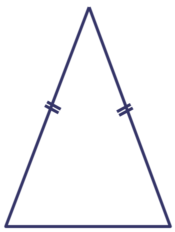


ثانيًا: حَسْبَ أطوالِ الأضلاعِ، ويصنّفُ إلى ثلاثةِ أنواعٍ هي:

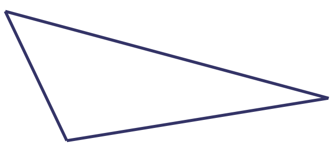
١) مثلّثٌ متطابقُ الأضلاعِ، أضلاعُهُ الثلاثةُ متطابقةٌ.



٢) مثلّثٌ متطابقُ الضّلعينِ، يكونُ فيهِ ضلعانِ متطابقانِ فقطْ.

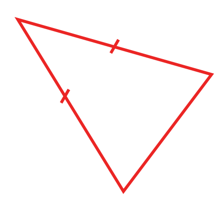


٣) مثلّثٌ مختلِفُ الأضلاعِ.

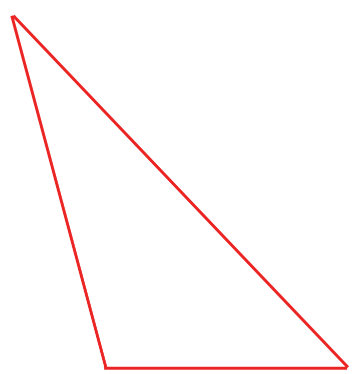


مثالُ (٢)

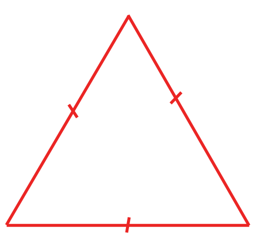
صنّفْ كلًّا مِنَ المثلّثاتِ الآتيةِ حَسَبَ أطوالِ الأضلاعِ:



(أ)



(ب)



(جـ)

الحلُّ

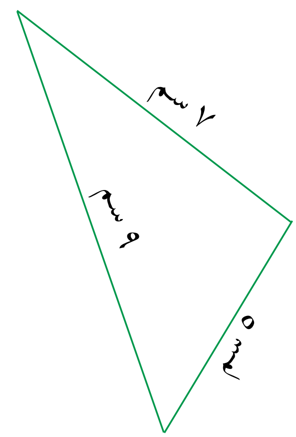
المثلّثُ (أ) مثلّثٌ متطابقُ الضلعينِ؛ لأنَّ فيهِ ضلعينِ متطابقينِ.

المثلّثُ (ب) مثلّثٌ مختلِفُ الأضلاعِ، لأنَّ ....

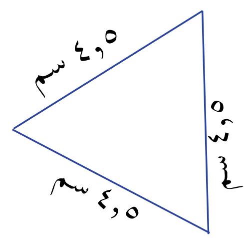
المثلّثُ (جـ) مثلّثٌ متطابقُ الأضلاعِ، لأنَّ ....

تدريبُ ٢

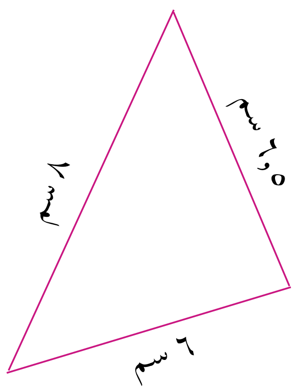
صنّفْ كلًّا مِنَ المثلّثاتِ الآتيةِ حَسَبَ أطوالِ أضلاعها المبيّنة:



(١)



(٢)

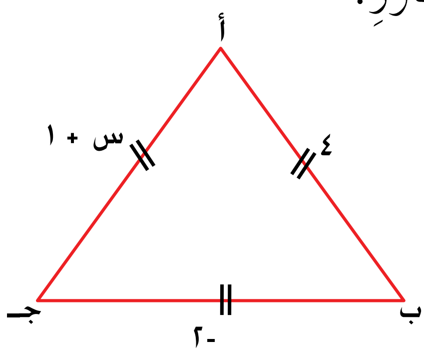


(٣)

تدريبُ ٣

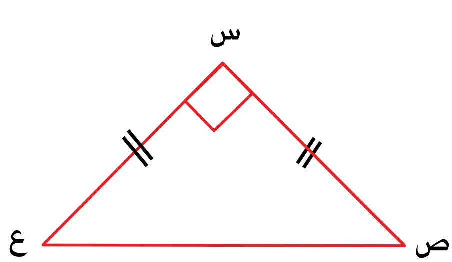
أ ب جـ مثلّثٌ متطابقُ الأضلاعِ كما في الشّكلِ المجاورِ:

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ س، ص.



تدريبُ ٤

س ص ع مثلّثٌ كما في الشّكلِ المجاورِ:



١) صنّفِ المثلّثَ حَسَبَ:

أ) قياسِ زواياهُ.

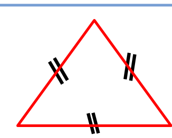
ب) أطوالِ أضلاعهِ.

٢) باستخدامِ المنقلةِ جِدْ قياسَ الزاويتينِ ص، ع.

ماذا تلاحظُ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) في الجدولِ الآتي ارسمْ مثلّثًا تقريبيًّا إنْ أمكنَ في الفراغِ المُعطى.

	قائمُ الزاويةِ	حادّ الزوايا	منفرِجُ الزاويةِ
مختلِفُ الأضلاعِ			
متطابقُ الضّلعينِ			
متطابقُ الأضلاعِ	مستحيلٌ (لماذا)؟		مستحيلٌ (لماذا)؟

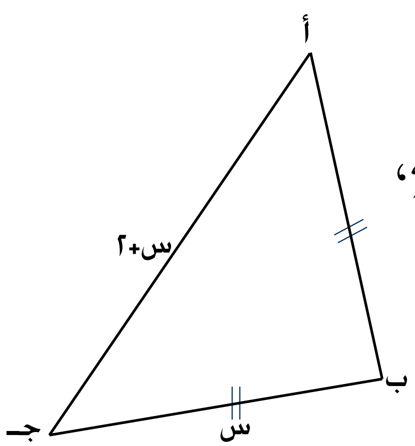
٢) أكملِ الفراغَ في ما يأتي:

أ) مثلّثٌ مجموعُ زاويتينِ فيه ٦٠°، يُسمّى مثلّثًا.....................

ب) مثلّثٌ قياسُ زواياهُ الثّلاثُ متساوٍ، يُسمّى مثلّثًا.....................

جـ) مثلّثٌ مجموعُ زاويتينِ فيه ٩٠° يُسمّى مثلّثًا.....................

٣) اعتمادًا على الشّكلِ المجاورِ:



أ) ما نوعُ المثلّثِ أ ب جـ مِنْ حيثُ أطوالِ أضلاعِهِ، وقياساتِ زواياه؟

ب) احسبْ محيطَ المثلّثِ بدلالة س.

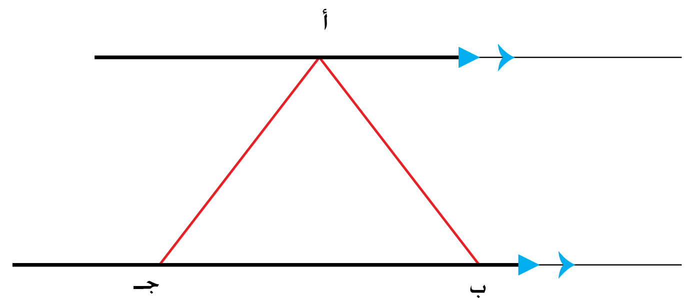
٤) ادّعى إبراهيمُ أنّهُ يستطيعُ رسمَ مثلّثٍ قياساتُ زواياهُ: ٧٠°، ٨٠°، ٤٠°، هلْ يستطيعُ ذلكَ؟ برّرْ إجابتكَ.

٥) أجبْ بنعمْ، أو لا، معَ ذِكْرِ السّببِ:

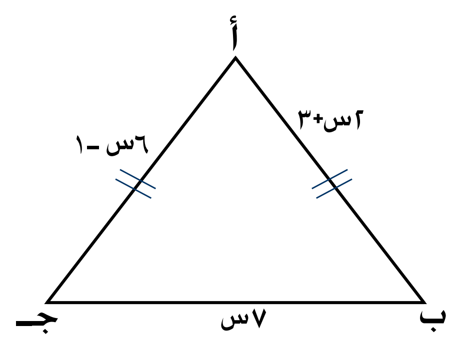
أ) كلُّ مثلّثٍ متطابقِ الأضلاعِ يكونُ متطابقَ الضّلعينِ.

ب) كلُّ مثلّثٍ متطابقِ الضّلعينِ تكونُ أضلاعهُ متطابقةً.

٦) تحدٍّ: بيّنْ أنَّ مجموعَ قياسِ زوايا المثلّثِ أ ب جـ في الشكلِ الآتي يساوي ١٨٠°.



٧) أ ب جـ مثلثٌ متطابقُ الضلعين، جد قيمة س.



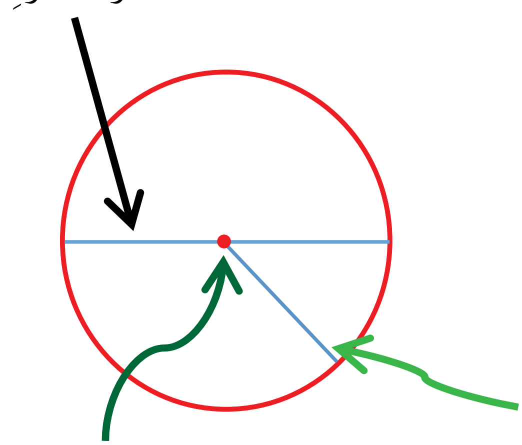
الدرسُ السّادسُ

محيطُ الدائرةِ

النتاجات

- تتعرفُ محيطَ الدائرةِ، والنّسبةَ التقريبيّةَ.
- تجدُ محيطَ دائرةٍ.

ذهبَ أحمدُ إلى مدينةِ الألعابِ، وركبَ الدّولابَ، ثُمّ سألَ والدهُ ما هي عناصر الدولابِ؟
الدّولابُ لهُ شكلٌ دائريٌّ ويمكنُ التّعرفُ على عناصرَ ومكوناتِ الدّائرةِ منْ خلالِ الشّكلِ الآتي:



تعلمتَ سابقًا أنَّ محيطَ المضلّعِ هو مجموعُ أطوالِ أضلاعهِ، أمّا محيطُ الدائرةِ فهو طولُ الخطِّ المنحني الذي يمثّلُ الدّائرةَ.

كيفَ يمكنكَ إيجادُ محيطِ الدّائرةِ؟ هلْ يوجدُ أكثرُ منْ طريقةٍ؟

نشاط

١) أحضرْ علبةً قاعدتها دائريّةُ الشّكلِ، كما في الشّكلِ المجاورِ.

٢) لُفَّ مترًا حولَ العلبةِ لتجدَ طولَ المسافةِ المحيطةِ بالدائرةِ.

٣) باستخدامِ المسطرةِ، جِدْ قياسَ قُطْرِ الدائرةِ.

٤) جِدْ خارجَ قسمةِ المحيطِ على طولِ القُطْرِ.

٥) كرّرِ الخطواتِ السابقةَ على علبتينِ مختلفتينِ إضافيتينِ، قاعدةُ كلٍّ منهما دائريّةٌ، واملأ الجدولَ الآتي:

رقمُ العلبةِ	المحيطُ	طولُ القطرِ = ٢× نق	$\frac{\text{المحيطُ}}{\text{٢} \times \text{نق}}$
١			
٢			
٣			

ماذا تلاحظُ؟

لعلكَ لاحظتَ أنَّ خارجَ قسمةِ المحيطِ على القُطْرِ لكلِّ دائرةٍ يساوي تقريبًا ٣,١٤ وهو مقدارٌ ثابتٌ لا يتغيّرُ، بالرّغمِ منَ اختلافِ مقاساتِ أقطارِ الدّوائرِ الثلاثةِ، وتُسمّى هذهِ النّسبةُ بالنّسبةِ التقريبيّةِ الثابتةِ (باي)، ويرمزُ لها بالرّمزِ π، وهو حرفٌ يونانيٌّ، وبذلكَ يكونُ: $\frac{\text{المحيط}}{\text{٢} \times \text{نق}} = \frac{\pi}{\text{١}}$ ، وبالضّربِ التبادليِّ يكونُ:

محيطُ الدّائرةِ = ٢ نق × π حيثُ $\pi \approx \text{٣,١٤} \approx \frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$

مثالُ (١)

جِدْ محيطَ الدّائرةِ التي نصفُ قطرها ١٠ سم.

الحلُّ

> عندَ حسابِ المحيطِ يكونُ النّاتجُ تقريبيًّا.

المحيطُ = ٢ نق × π

≈ ٢ × ١٠ × ٣,١٤

≈ ٢٠ × ٣,١٤

≈ ٦٢,٨ سم

تدريبُ ١

دائرةٌ قطرها ٤٢ سم، احسبْ محيطها.

مثالُ (٢)

دائرةٌ محيطها ٤٤ سم، جِدْ طولَ نصف قطرها.

الحلُّ

محيطُ الدائرةِ = ٤٤ سم، نصفُ القُطْرِ مجهولٌ، $\pi \approx \frac{٢٢}{٧}$

٢ نق π = ٤٤

٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق ≈ ٤٤

$\frac{٧}{٤٤}$ × $\frac{٤٤}{٧}$ × نق ≈ $\frac{٧}{٤٤}$ × ٤٤   الضّربُ في مقلوبِ $\frac{٤٤}{٧}$ (لماذا)؟

نق ≈ ٧ سم   الاختصارُ

تدريبُ ٢

إذا كانَ قطرُ دولابِ الألعابِ ١٤ مترًا، فكم مترًا سيقطعُ الدولابُ في:

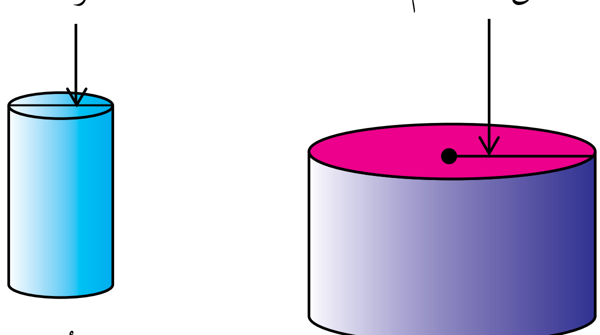
١) الدّورةِ الواحدةِ.

٢) نصفِ الدّورةِ.

٣) رُبعِ الدورةِ.

تدريبُ ٣

بدونِ حسابِ المحيطِ، كم مرّةً يزيدُ محيطُ قاعدةِ الشّكلِ (أ)، عنْ محيطِ قاعدةِ الشّكلِ (ب).

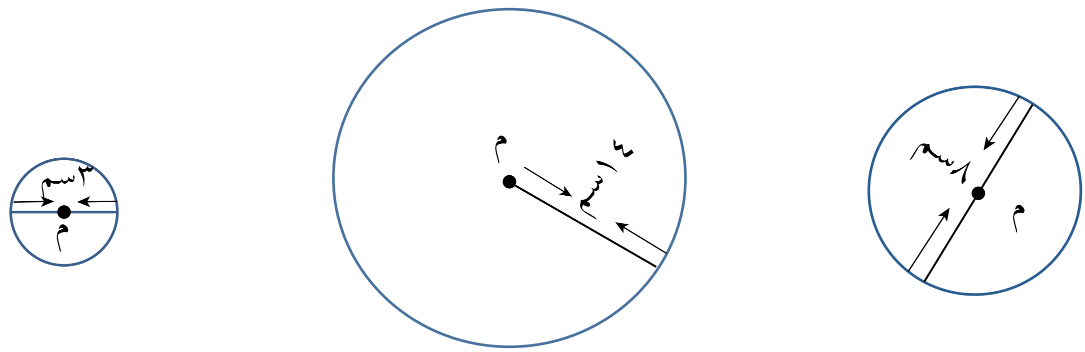


الشّكلُ (أ)

الشّكلُ (ب)

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ محيطَ كلٍّ مِنَ الدّوائرِ الآتيةِ:



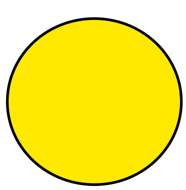
٢) قاعةُ اجتماعاتٍ قاعدتها دائريّةُ الشّكلِ، محيطها ٥٠ م، جِدْ طولَ نصفِ قطرها.

٣) حديقةٌ قاعدتها دائريّةُ الشّكلِ، طولُ نصفِ قطرها ٤٠ م، أرادَ صاحبها تسييجها، فإذا كانتْ تكلفةُ المترِ الواحدِ مِنَ السّياج ٤ دنانيرَ، فكمْ تكلفةُ السياجِ؟

٤) ركضَ عُمَرُ حولَ مضمارٍ دائريِّ الشّكلِ، قطرهُ ٢٨ مترًا، مسافةَ ٤٤٠ مترًا، فكمْ دورةً أكملَ عُمَرُ؟

٥) مَسبحانِ قاعدتهما دائريتا الشّكلِ، الأولُ نصفُ قطرِ قاعدتهِ ١٤ مترًا والثاني طولُ قطر قاعدته ٢٢ مترًا، ما الفرقُ بينَ محيطيهما؟

٦) ادّعى طارقٌ أنَّ محيطَ الدائرةِ في الشّكلِ المجاورِ هو المنطقةُ الملوّنةُ باللّونِ الأصفرِ. هلْ توافقُ طارقًا؟ معَ ذِكْرِ السّببِ.



الدرسُ السّابعُ مساحةُ الدّائرةِ

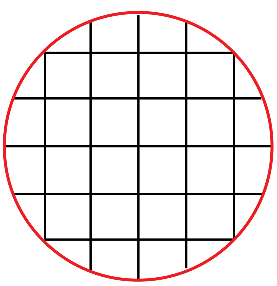
النتاجات

- تجدُ مساحةَ الدائرةِ.
- توظّفُ مساحةَ الدائرةِ في حلِّ مسائلَ عمليةٍ.

مسبحٌ قاعدتهُ دائريّةُ الشّكلِ طول قطرها ٤ متر، يُراد تبليطها ببلاطٍ مربَّعِ الشكل طولُ ضلعِهِ ٢٠سم، كم بلاطةً نحتاجُ؟

للإجابةِ عنِ السؤالِ يلزمنا معرفةُ مساحة الدائرة؟

الشّكلُ المجاورُ يمثّلُ دائرةً:



١) قدّرْ مساحةَ الدّائرةِ.

٢) هلْ يمكنُ حسابُ مساحةِ الدّائرةِ بشكلٍ أدقّ؟

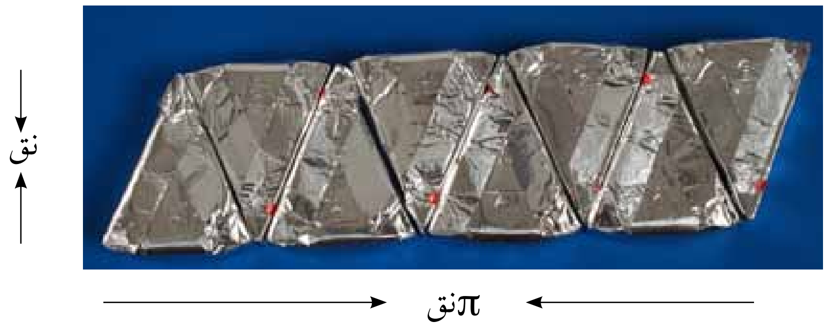
لمعرفةِ ذلكَ قُمْ بالنّشاطِ الآتي:

نشاطٌ

١) احضرْ علبةَ جبنةٍ، القِطعُ فيها على شكلِ مثلثاتٍ.

٢) رتّبْ كلَّ قطعتينِ بشكلٍ متعاكسٍ كما في الشّكلِ المجاورِ.

٣) استمرَّ في الترتيبِ وبنفسِ النّمطِ لجميعِ القطعِ، فتحصلَ على شكلِ متوازي أضلاعٍ.



إذنْ: مساحةُ الدّائرةِ = مساحةَ متوازي الأضلاعِ.

= طولَ القاعدةِ × الارتفاعِ.

= πنق × نق

= πنق^{٢}

إذنْ: مساحةُ الدائرةِ = π نق^{٢} ، حيثُ π ≈ ٣,١٤ أو π ≈ $\frac{٢٢}{٧}$

مثالُ (١)

جِدْ مساحةَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قطرها ١٠ سم.

الحلُّ

مساحةُ الدّائرةِ = π نق^{٢}

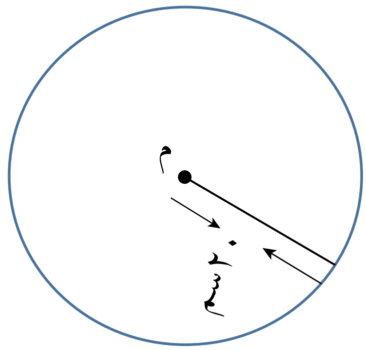
≈ ٣,١٤ × ١٠^{٢}

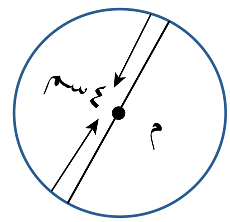
≈ ٣,١٤ × ١٠٠

≈ ٣١٤ سم^{٢}

تدريبُ ١

جِدْ مساحةَ كُلٍّ مِنَ الدّوائرِ الآتية:





مثالُ (٢)

دائرةٌ مساحتها ٦١٦ سم^{٢}، احسبْ طولَ قطرها.

الحلُّ

المساحةُ معلومةٌ، والقطرُ مجهولٌ، نطبّقُ القانونَ:

مساحةُ الدائرةِ = πنق^{٢}

$٦١٦ \approx \frac{٢٢}{٧} \times$ نق^{٢}

$\frac{٧}{٢٢} \times \frac{٦١٦}{١} \approx \frac{٧}{٢٢} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق^{٢} الضّربُ بمقلوبِ $\frac{٢٢}{٧}$

$١٩٦ \approx$ نق^{٢} بالاختصارِ

نق ≈ ١٤ سم بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطّرفينِ

ومنهُ فإنَّ القطرَ $\approx ٢ \times ١٤ \approx ٢٨$ سم (لماذا $\times$ ٢)؟

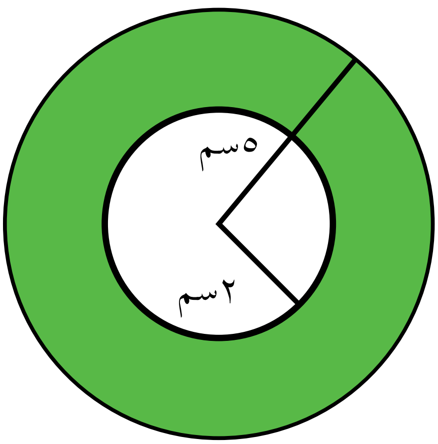
تدريبُ ٢

دائرةٌ محيطها ٤٤ سم، احسبْ مساحتها.

تدريبُ ٣

إذا كانَ طولُ قُطْرِ الدّائرةِ التي تقعُ في منتصفِ ملعبِ كرةِ القدمِ يساوي ٩ أمتارٍ تقريبًا، جِدْ مساحتها بدلالةِ π

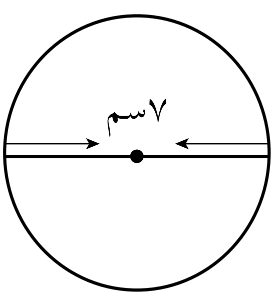
تدريبُ ٤



الشّكلُ الآتي يمثّلُ دائرتينِ متحدتينِ بالمركزِ، طولُ نصفِ قطرِ الأولى ٢ سم، و طولُ نصفِ قطرِ الثّانيةِ ٥سم ، جِدْ مساحةَ المنطقةِ المظلّلةِ باللّونِ الأخضرِ.

فكّر وناقش

قامتْ يسرا بحسابِ مساحةِ الدّائرةِ الممثَّلةِ في الشّكلِ المجاورِ، كما يأتي:



مساحةُ الدائرةِ = π نق^{٢}

$$\approx \frac{٢٢}{٧} \times ٧^{٢}$$

$$\approx \frac{٢٢}{٧} \times ٤٩$$

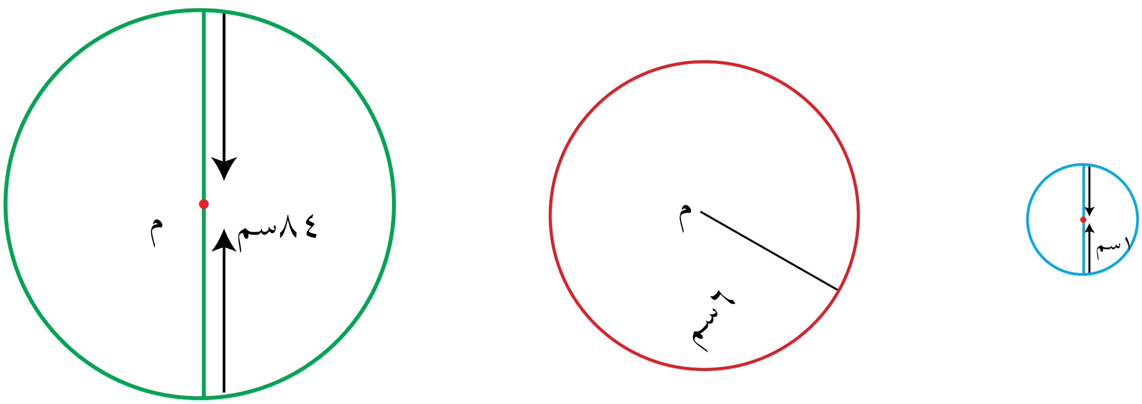
$$\approx ٢٢ \times ٧$$

$\approx$ ١٥٤ سم^{٢}

هلْ توافقُ يسرا على هذا الحلِّ؟ برّرْ اجابتكَ.

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ مساحةَ الدّائرةِ في كلٍّ ممّا يأتي:



٢) شطيرةٌ دائريّةُ الشّكلِ، طولُ نصفِ قطرها ١٥سم، جِدْ كلًّا ممّا يأتي بدلالةِ π:

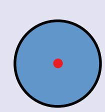
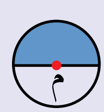
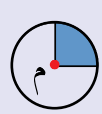
أ) مساحتها.

ب) محيطها.

٣) مسبحٌ قاعدتهُ دائريّةُ الشّكلِ، طولُ نصفِ قطرها ١٤ مترًا، كم بلاطةً مربّعةَ الشّكلِ، طولُ ضلعها ٥٠سم نحتاجُ لتبليطِ هذا المسبحِ؟

٤) سجّادةٌ دائريةُ الشّكلِ، طولُ نصفِ قطرها مترانِ، إذا كانَ ثمنُ المترِ المربّعِ الواحدِ ١٠ دنانيرَ، فما ثمنُ السجّادةِ؟

٥) املأِ الجدولَ الآتي بالعددِ المناسبِ:

الشّكلُ المظلل			
مساحتهُ	64π سم^2		
محيطه			

٦) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مراجعةٌ

١) اقرأِ العباراتِ الآتيةَ، ثُمّ أجبْ "بنعم" أو "لا"، مَعَ ذِكْرِ السّببِ:

أ) كلُّ زاويتينِ متتامّتينِ متحالفتانِ.

ب) كلُّ زاويتينِ متبادلتينِ في حالةِ التوازي متساويتانِ في القياس.

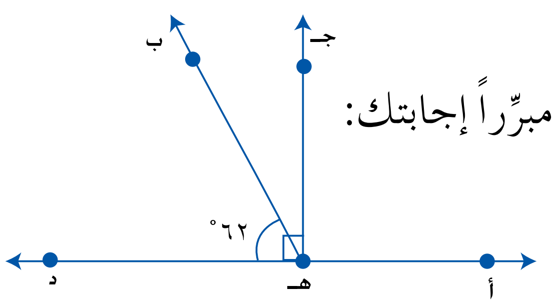
جـ) إذا كانتْ ∢س، ∢ص زاويتينِ متكاملتينِ، وكان ق ∢س = ١١٠°، فإنَّ ق ∢ص = ٧٠°

د) ليسَ مِنَ الضرورةِ أنْ تكونَ الزوايا المتناظرةُ متساويةً.

٢) إذا كانَ ق ∢ن = ٨٣°، فما قياسُ الزاويةِ المتتامّةِ، والزاويةُ المتكاملةِ معَ ∢ن ؟

٣) في الشّكلِ المجاورِ إذا كانَ: $\overleftrightarrow{\text{أ د}} \perp \overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ ،

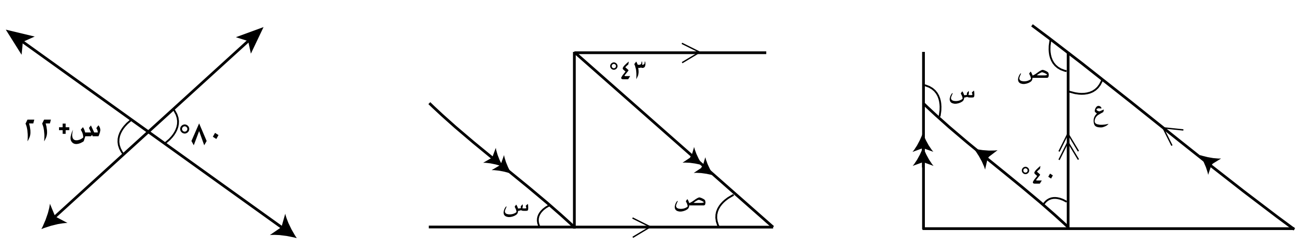
وَ ق ∢ د هـ ب = ٦٢°. جِدْ قياسَ كلٍّ ممّا يأتي مبرِّراً إجابتك:



أ) ق ∢جـ هـ أ

ب) ق ∢جـ هـ ب

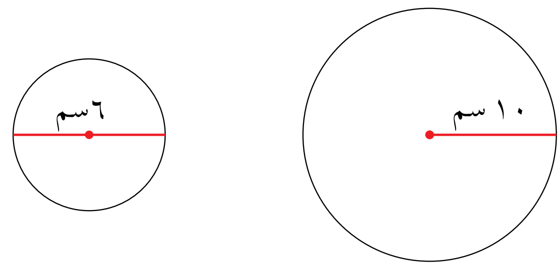
٤) جِدْ قياسَ الزوايا المجهولةِ في كُلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ، مبرّرًا إجابتكَ:



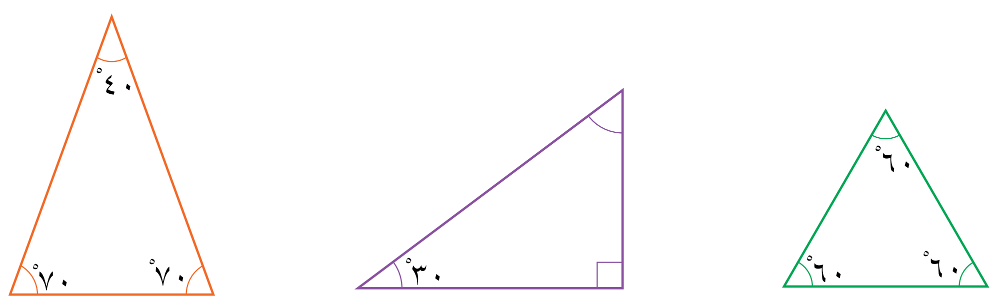
(جـ) (ب) (أ)

٥) إذا كانتْ نسبةُ قياسِ زاويتينِ متتامّتينِ ٣:٢، فما قياسُ الزاويةِ الأكبرِ؟

٦) جِدْ مساحةَ ومحيطَ كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:



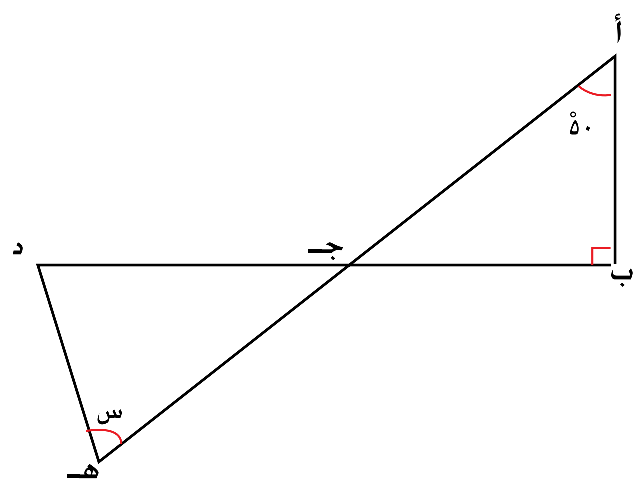
٧) صنّفِ المثلّثاتِ الآتيةِ: حَسَبَ قياسِ الزوايا، وأطوالِ الأضلاعِ.



٨) دائرةٌ مساحتها ١٦ π وحدةً مربعّةً، جد:

أ) طولَ نصفِ قطرِها بدلالةِ π　　　　ب) محيطها بدلالةِ π

*٩) في الشّكلِ الآتي، إذا كان جـ د = جـ هـ ما قياسُ ∡س؟



* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكوّنُ هذا السؤالُ من ثلاثِ فقراتٍ من نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلِّ فقرةٌ أربعةُ بدائلَ واحدٌ منها فقط صحيحٌ، ضَعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصّحيحِ في ما يأتي:

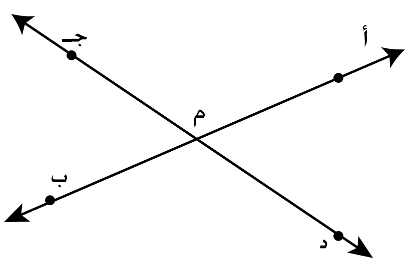
(١) الزاويةُ التي قياسها ٣٧° متتامّةٌ معَ زاويةٍ قياسها :

أ) ٣٧°   ب) ٥٣°   جـ) ٦٣°   د) ١٤٣°

(٢) مجموعُ قياسِ الزاويتينِ المتجاورتينِ النّاتجتينِ مِنْ تقاطعِ شعاعٍ ومستقيمٍ يساوي:

أ) ٩٠°   ب) ١٨٠°   جـ) ٢٧٠°   د) ٣٦٠°

(٣) في الشكلِ المجاورِ تُسمّى الزاويتانِ ∡ أ م د، ∡ ب م جـ زاويتينِ:



أ) متجاورتينِ

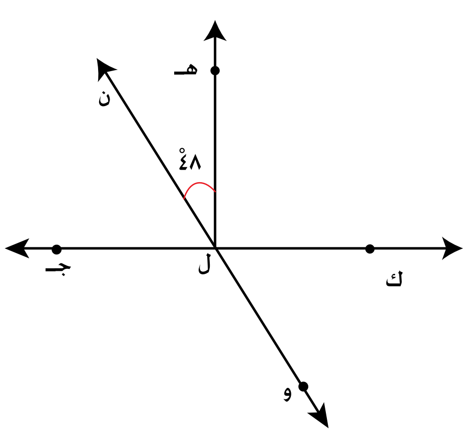
ب) متبادلتينِ

جـ) متناظرتينِ

د) متقابلتينِ بالرأسِ

٢) في الشكلِ المجاورِ، إذا كان: $\overleftrightarrow{\text{ك جـ}} \perp \overrightarrow{\text{ل هـ}}$،

ق∡هـ ل ن = ٤٨°. جِدْ قياسَ كُلٍّ ممّا يأتي:



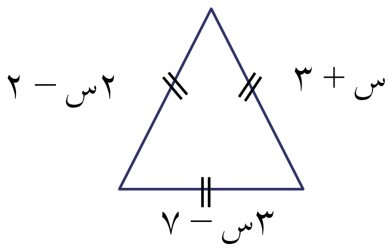
أ) ق∡ جـ ل هـ.

ب) ق∡ هـ ل ك.

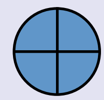
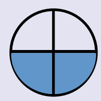
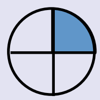
جـ) ق∡ ك ل و.

د) ق∡ جـ ل و.

٣) إذا علمتَ أنَّ محيطَ المثلّثِ في الشّكلِ المجاورِ يساوي ٢٤ سم، فما قيمةُ س؟



٤) املأِ الجدولَ الآتي بالعددِ المناسبِ:

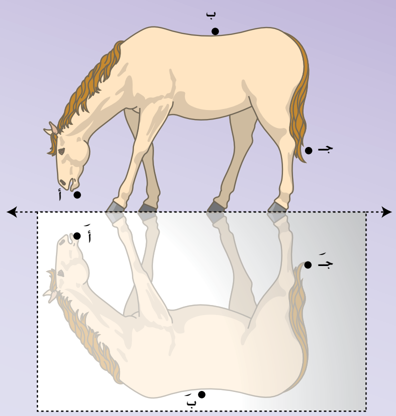
الشّكلُ المظلَّلُ			
المساحةُ	١٥٤ سم^{٢}		
المحيط			

٧

الوحدة السابعة

التحويلاتُ الهندسيةُ

عندما يقفُ شخصٌ أمامَ مرآةٍ مستويةٍ، هلْ يتغيّرُ شكلهُ وحجمُه؟ وهلْ تتغيرُ المسافةُ بينهُ وبينَ مستوى المرآةِ عنِ المسافةِ بينَ صورتهِ ومستوى المرآةِ؟



وعندما تقومُ بتحريكِ مقعدكَ في الصّفِّ مِنْ مكانٍ إلى آخرَ، فهلْ يؤثْرُ ذلكَ على حجمِ وشكْلِ المقعدِ؟

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- تَعرّفِ مفهومِ التّحويلِ، والتّحويلِ الهندسيِّ.
- تَعرّفِ مفهومِ الانعكاسِ، وخواصِّ الانعكاسِ كتحويلٍ هندسيٍّ، وتعيينِ صورةِ نقطةٍ، وقطعةٍ مستقيمةٍ، وشكْلٍ هندسيٍّ تحتَ تأثيرِ انعكاسٍ معيّنٍ في المستوى الإحداثيِّ.
- تَعرّفِ مفهومِ الانسحابِ، وخواصِّ الانسحابِ كتحويلٍ هندسيٍّ، وتعيينِ صورةِ نقطةٍ، وقطعةٍ مستقيمةٍ، وشكْلٍ هندسيٍّ تحتَ تأثيرِ انسحابٍ معيّنٍ في المستوى الإحداثيِّ.
- تَعرّفِ مفهومِ الدّورانِ، وخواصِّ الدورانِ كتحويلٍ هندسيٍّ، وتعيين صورةِ نقطةٍ، وقطعةٍ مستقيمةٍ، وشَكْلٍ هندسيٍّ تحتَ تأثيرِ دورانٍ معيّنٍ في المستوى الإحداثيِّ.

التحويلُ الهندسيُّ

النتاجات

- تتعرفُ على مفهومِ التّحويلِ، والتّحويلِ الهندسيِّ.

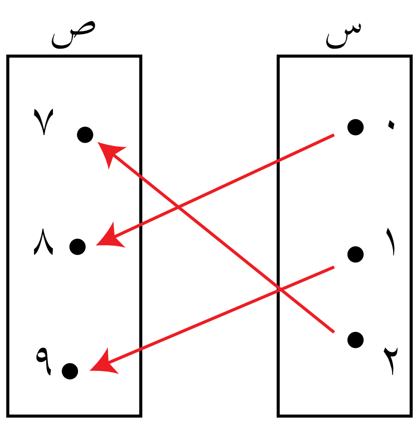
مثّلَ عمادٌ العلاقةَ ع المعرّفةَ مِنَ المجموعةِ س إلى المجموعةِ ص بالمخطّطِ السهميِّ، كما في الشّكلِ المجاورِ:

١) اكتبْ مجموعةَ الأزواجِ المرتّبةِ التي تمثّلها العلاقةُ ع.

٢) جِدْ مجالَ ومدى العلاقةِ ع.

٣) جِدْ صورةَ كلٍّ مِنَ العناصرِ ٠ ، ١ ، ٢ في العلاقةِ ع.

٤) جِدِ العناصرَ التي صورَةُ كُلٍّ منها: ٧ ، ٨ ، ٩ في العلاقةِ ع.



تعلّمتَ سابقًا كيفَ تكتبُ مجموعةَ الأزواجِ المرتّبةِ التي تمثّلها العلاقةُ ع مِنْ خلالِ المخطّطِ السهميِّ وهي:

ع = {(٠،٨) ، (١،٩) ، (٢،٧)}، ومنْ خلالِ العلاقةِ ع، يمكنُ إيجادُ مجالِ العلاقةِ ع ومداها، فالمجالُ = {٠ ، ١ ، ٢} والمدى = {٨ ، ٩ ، ٧}.

لاحظْ مِنْ خلالِ العلاقةِ ع أنَّ صورَةَ العددِ ٠ هي العددُ ٨، وصورةَ العددِ ١ هي العددُ ٩، و صورةَ العددِ ٢ هي العددُ ٧، أيْ أنَّ العددَ ٠ ارتبطَ معَ العددِ ٨، وأنَّ العددَ ١ ارتبطَ معَ العددِ ٩، وأنَّ العددَ ٢ ارتبطَ مع العددِ ٧.

أيْ أنَّ كلَّ عنصرٍ في مجالِ العلاقةِ ع ارتبطَ بصورةٍ واحدةٍ فقطْ في مداها.

ونلاحظُ أنَّ العددَ ٧ هو صورةٌ للعددِ ٢، و العددَ ٨ هو صورةٌ للعددِ ٠، كذلكَ العددَ ٩ هو صورةٌ للعددِ ١.

أيْ أنَّ كلَّ عنصرٍ في مدى العلاقةِ ع هو صورةٌ لعنصرٍ واحدٍ فقطْ مِنْ مجالها.

تُسمّى العلاقةُ ع تحويلا إذا ارتبطَ كلُّ عنصرٍ في مجالها بصورةٍ واحدةٍ فقطْ في مداها، و كلُّ عنصرٍ في مداها هو صورةٌ لعنصرٍ واحدٍ فقطْ في مجالها.

مثالُ (١)

إذا كانتْ س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦}، أيُّ العلاقاتِ الآتيةِ تمثّلِ تحويلاً مِنَ المجموعةِ س إلى المجموعةِ ص؟ اذكرِ السَّببَ.

١) ع = {(٣،٤) ، (٠،٢) ، (٢،٦) ، (١،٠)}

٢) ف = {(١،٦) ، (٢،٢) ، (٣،٤) ، (٢،٠)}

٣) ك = {(٠،٠) ، (١،٦) ، (٢،٢) ، (٣،٤)}

٤) ل = {(٢،٠) ، (٣،٢) ، (٠،٠) ، (٠،٦)}

الحلُّ

١) يُعتبرُ تحويلاً؛ لأنَّ كلَّ عنصرٍ في مجالِ العلاقةِ ع ارتبطَ بصورةٍ واحدةٍ فقطْ في مداها، وكلَّ عنصرٍ في مدى العلاقةِ ع هو صورةٌ لعنصرٍ واحدٍ فقطْ في مجالها.

٢) لا يُعتبرُ تحويلاً؛ لأنَّ العنصرَ ٢ في مجال العلاقة ف له صورتانِ في المدى هما ٢، ٠

٣) يُعتبرُ تحويلاً؛ لأنَّ كلَّ عنصرٍ في مجالِ العلاقةِ ك ارتبطَ بصورةٍ واحدةٍ فقطْ في مداها، وكلَّ عنصرٍ في مدى العلاقةِ ك هو صورةٌ لعنصرٍ واحدٍ فقطْ في مجالها.

٤) لا يُعتبرُ تحويلًا؛ لأنَّ كُلاًّ مِنَ العنصرينِ ٢ ، ٠ في مجال العلاقة ل لهما نفسُ الصورةِ في المدى وهي ٠، وكذلكَ العنصرُ ٠ في المجالِ ارتبطَ بعنصرينِ ٠، ٦ في المدى.

تدريبُ ١

إذا كانتْ ل = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، م = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، أيُّ العلاقاتِ الآتيةِ تمثّلُ تحويلاً مِنَ المجموعةِ ل إلى المجموعةِ م، معَ ذِكْرِ السّببِ؟

١) ع = { (١،٢) ، (٠،٢) ، (٢،٣) }

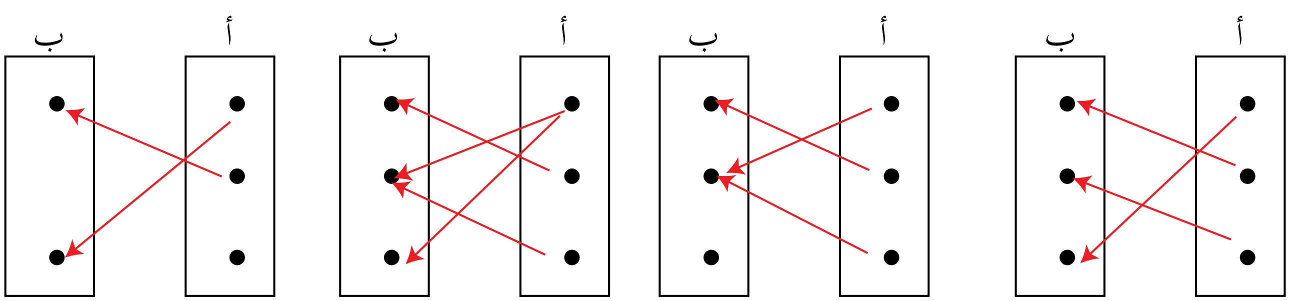
٢) س = { (٢،٢) ، (٣،٣) ، (١،١) }

٣) ل = { (٠،١) ، (١،١) ، (٢،١) ، (٣،١) }

٤) د = { (٣،٢) ، (٤،١) ، (٢،٣) ، (٤،٤) }

تدريبُ ٢

أيٌّ مِنَ العلاقاتِ الآتيةِ تمثّلُ تحويلاً مِنَ المجموعةِ أ إلى المجموعةِ ب، معَ توضيحِ السبّبِ؟



العلاقة (١) العلاقة (٢) العلاقة (٣) العلاقة (٤)

لاحظ مما سبق أن **التحويل** هو علاقةٌ تربطُ كلَّ **عنصرٍ** في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقط في المدى، وكلَّ عنصرٍ في المدى هوَ صورةٌ لنقطةٍ واحدةٍ فقط في المجالِ،

ولكنْ إذا كانَ الارتباطُ بينَ **نقاطٍ** (أزواجٍ مرتّبةٍ) في مستوىً ما، فإنَّ ذلكَ يُسمّى تحويلا هندسيًّا.

التحويلُ الهندسيُّ: هو علاقةٌ تربطُ نقاطَ المستوى معَ بعضِها، حيثُ كلُّ نقطةٍ في المستوى ترتبطُ معَ نقطةٍ واحدةٍ فقطْ مِنَ المستوى تُسمّى صورتها، وكلُّ نقطةٍ في المستوى هي صورةٌ لنقطةٍ واحدةٍ فقطْ مِنْ نقاطِ المستوى.

تُسمّى التحويلاتُ الهندسيّةُ بأحدِ الأحرفِ العربيّةِ مثلَ: ت ، ح ، ع ... إلخ ويُستخدمُ الرّمزُ (⟵) ليدلَّ على التحويلِ الهندسيِّ.

فمثلاً الرمزُ د ⟵ دَ تعني أنَّ النقطةَ د تحوّلتْ إلى النقطةِ دَ

والرّمزُ (ت: Δ أ ب جـ ⟵ Δ أَ بَ جـَ) يعني أنَّ المثلّثَ أَ بَ جـَ هو صورةُ المثلّثِ أ ب جـ تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت.

مثالُ (٢)

في المستوى الإحداثيّ ليكنْ ت :(س،ص) ⟵ (س + ١ ، ص + ٢) تحويلاً هندسيًّا، جِدْ صورةَ النّقاطِ أ (٢ ، ٣) ، ب (−٢ ، ٠) تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت.

الحلُّ

ت: أ (٢ ، ٣) ⟵ أَ (٢+١ ، ٣+٢) أي أنَّ النقطةَ أ (٢ ، ٣) أصبحتْ تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت، النقطةَ أَ (٣ ، ٥).

ت: ب (−٢ ، ٠) ⟵ بَ (−٢+١ ، ٠+٢) أيْ أنَّ النقطةَ ب (−٢ ، ٠) أصبحتْ تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت النقطةَ بَ (−١ ، ٢).

تدريبُ ٣

في المستوى الإحداثيِّ ليكنْ ت:(س ، ص) ← (ص ، س) تحويلاً هندسيًّا، جِدْ صورةَ كلِّ نقطةٍ مِنَ النّقاطِ الآتيةِ تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت:

١) أ (−٤ ، ٥)

٢) ب (٥ ، −١)

٣) جـ (−٣ ، −٤)

٤) د (٠ ، ٠)

تدريبُ ٤

أوجدَ مروانُ صورًا لمجموعةٍ من النّقاطِ النّاتجةِ عنِ التّحويلِ الهندسيِّ د كالآتي:

د: أ (١ ، ٢) ⟵ أَ (٠ ، ٣)

د: ب (٠ ، ٤) ⟵ بَ (−١ ، ٥)

د: جـ (−٤ ، ١) ⟵ جـَ (−٥ ، ٢)

اكتبْ صيغةَ التحويلِ الهندسيِّ د.

فكّر وناقش

إذا كانتْ ت تحويلا مِنَ المجموعةِ س إلى المجموعةِ ص، فما العلاقةُ بينَ عددِ عناصرِ المجموعتينِ س،ص؟

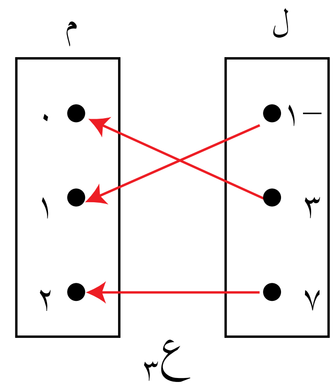
تمارينُ ومسائلُ

١) إذا كانت ل = { −١ ، ٣ ، ٧ } ، م = { ٠ ، ١ ، ٢ }، أيُّ العلاقاتِ الآتيةِ تمثلُ تحويلاً من المجموعةِ ل إلى المجموعةِ م؟ اذكرِ السببَ

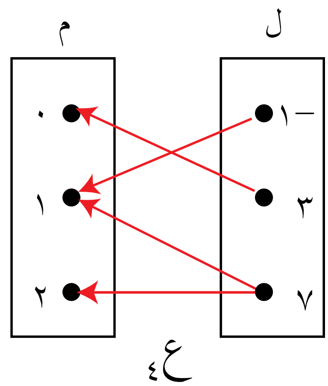
أ) ع$_{١}$ = { (−١،٢) ، (٧،٠) ، (٣،٢) }

ب) ع$_{٢}$ = { (−١،٢) ، (٣،٠) ، (٧،١) }

جـ)



د)



٢) في المستوى الإحداثيِّ ليكنْ ت: (س ، ص) ← (− س ، ص) تحويلاً هندسياً، جِدْ صورةَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ تحتَ تأثيرِ التحويلِ الهندسيِّ ت:

أ) أ (٢ ، ٦) ب) ب (٣ ، −١)

جـ) جـ (−٥ ، ٧) د) د (−٢ ، −٤)

٣) جِدْ صورةَ النّقطةِ أ (٢ ، ١) تحتَ تأثيرِ التّحويلاتِ الهندسيّةِ الآتيةِ:

أ) ح:(س ، ص) ← (ص ، س)

ب) ع:(س ، ص) ← (− س ، ص)

جـ) ل:(س ، ص) ← (س ، − ص)

د) ن:(س ، ص) ← (− س ، − ص)

هـ) د:(س ، ص) ← (ص ، − س)

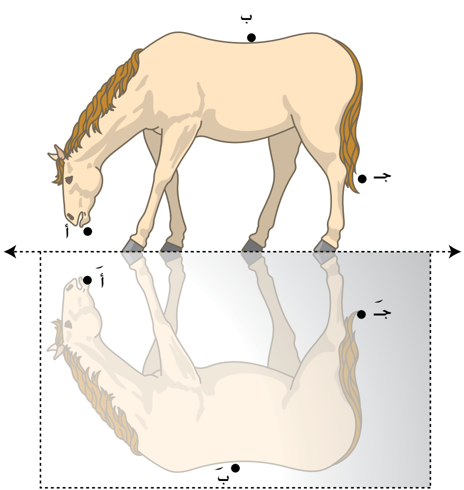
الدرسُ الثّاني

الانعكاسُ

النتاجات

- تتعرفُ مفهومَ الانعكاسِ، وخواصّهِ، كتحويلٍ هندسيٍّ.
- تعيّنُ صورةَ نقطةٍ، وقطعةٍ مستقيمةٍ، وشكْلٍ هندسيٍّ، تحتَ تأثيرِ انعكاسٍ معيّنٍ في المستوى الإحداثيّ.

الشّكلُ المجاورُ يمثّلُ صورةً لحصانٍ يقفُ على جانبِ النّهرِ، حيثُ يعملُ سطحُ الماءِ كمرآةٍ يقلبُ صورةَ الحصانِ حولَ سطحِ الماءِ.



١) قارنْ شكلَ الحصانِ معَ صورتهِ على جهتي سطحِ الماءِ.

٢) قارنِ المسافةَ بينَ النّقاطِ أ، ب، جـ، وصورها أَ، بَ، جـَ، منْ حيثُ بعدها عنْ سطحِ الماءِ على التّرتيبِ، ماذا تلاحظُ؟

بقياسِ المسافةِ بينَ كلِّ نقطةٍ وسطحِ الماءِ، ستلاحظُ أنَّ:

المسافةَ منْ أ إلى سطحِ الماءِ = المسافةَ منْ أَ إلى سطحِ الماءِ.

المسافةَ منْ ب إلى سطحِ الماءِ = المسافةَ منْ بَ إلى سطحِ الماءِ.

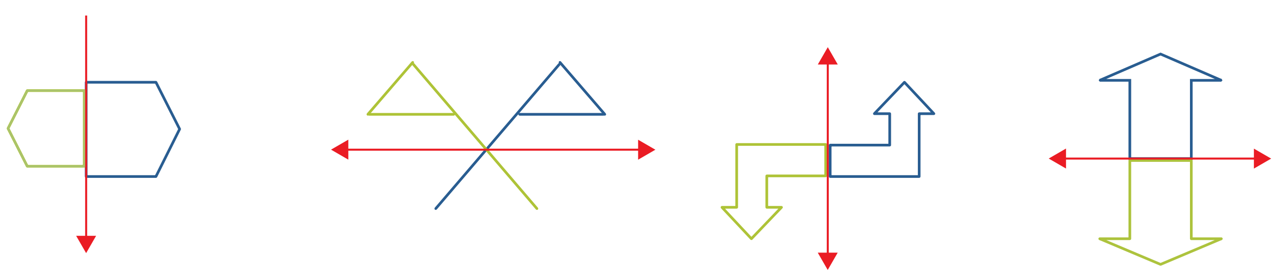
المسافةَ منْ جـ إلى سطحِ الماءِ = المسافةَ منْ جـَ إلى سطحِ الماءِ.

إنَّ عمليةَ قلْبِ صورةِ الحصانِ، والحصولِ على صورةِ مرآةٍ لهُ، دونَ أنْ يغيّرَ ذلكَ منْ قياساتهِ، أو شكْلهِ يُسمّى انعكاسًا، ويُسمّى سطحُ الماءِ في هذهِ الحالةِ محورَ الانعكاسِ، ويعتبرُ الانعكاسُ تحويلا هندسيًّا، لماذا؟

الانعكاسُ: هو تحويلٌ هندسيٌّ يقلبُ شكلاً ما حولَ محورٍ معينٍ يعمل كمرآةٍ ويُسمّى (محورَ الانعكاسِ)، للحصولِ على صورةٍ لهذا الشكلِ دونَ أنْ يغيرَ من قياساتهِ، ويرمزُ له بالرّمزِ ع.

مثالُ (١)

إذا كانَ الخطُّ الأحمرُ يشيرُ إلى محورِ الانعكاسِ، أيُّ الرسوماتِ الآتيةِ تمثّلُ انعكاسًا للشّكلِ الملوّنِ باللّونِ الأزرقِ في المحْورِ؟



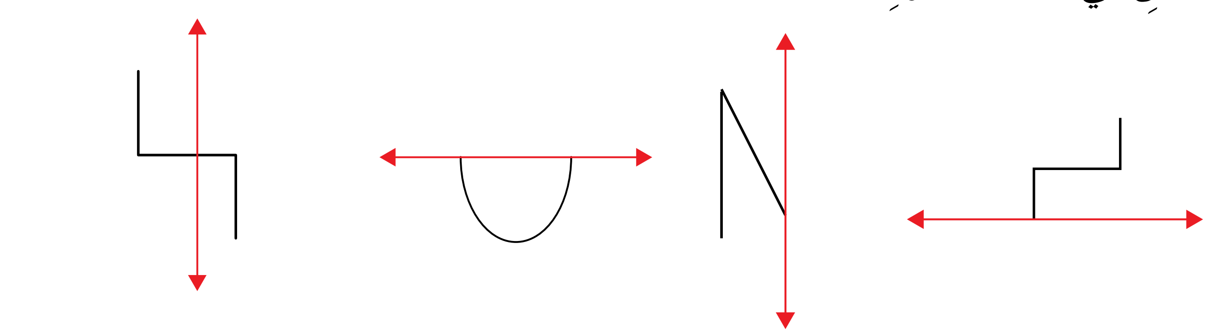
الشكل (١) الشكل (٢) الشكل (٣) الشكل (٤)

الحلُّ

الشّكلُ (١) يمثّلُ انعكاسًا؛ لأنّهُ عبارةٌ عنْ قلبِ الشّكلِ الأصليِّ في محورِ الانعكاسِ للحصولِ على صورةِ مرآةٍ لهذا الشّكلِ دونَ أنْ يغيّرَ مِنْ قياساتهِ، بينما الأشكالُ (٢)، (٣)، (٤) لا تمثّلُ انعكاسًا؛ لأنَّ الشّكلَ (٢) والشّكلَ (٣) لم يحصلا على صورةِ مرآةٍ للشّكلِ الأصليِّ في المحور، بينما في الشّكلِ (٤) حصلَ تغييرٌ على قياساتِ الشّكلِ الأصليِّ لذلكَ لا يُعتبرُ انعكاسًا.

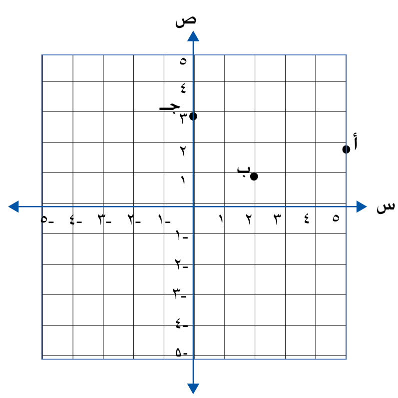
تدريبُ ١

إذا كانَ الخطَّ الأحمرَ يشيرُ إلى محورِ الانعكاسِ، ارسمْ صورةَ كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ بالانعكاسِ في هذا المحورِ:

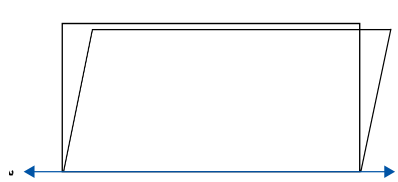


نشاطُ (١)

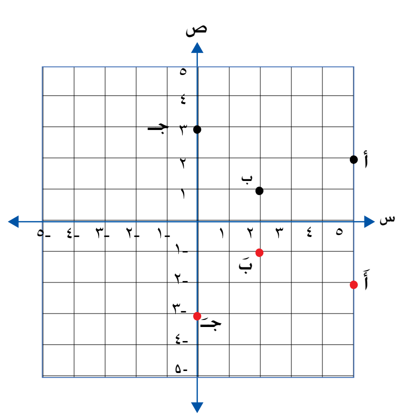
١) ارسمْ مستوىً بيانيًّا على ورقةٍ شفّافةٍ، ثُمَّ عيّنِ النّقاطَ أ (٥،٢) ، ب (٢،١) ، جـ (٠،٣) على المستوى البيانيِّ، كما في الشّكلِ المجاورِ:



٢) قُمْ بطيِّ المستوى البيانيِّ حولَ محورِ السيناتِ، كما في الشّكلِ المجاورِ، ثُمّ ضعْ علامةً باللّونِ الأحمرِ فوقَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ ، ب ، جـ من الجهةِ الظّاهرةِ.



٣) أرجعِ الورقةَ كما كانتْ، ستلاحظُ أنّهُ نتجتْ صورةٌ لكلِ نقطةٍ مِنَ النقاطِ الثلاثةِ أ ، ب ، جـ على الجانبِ الآخرِ وهي أَ ، بَ ، جـَ كما في الشّكلِ المجاورِ:



٤) اكتبْ إحداثياتِ كلِّ نقطةٍ مِنَ النّقاطِ أَ ، بَ ، جـَ

إحداثياتُ النقطةِ أَ هي (....،....)

إحداثياتُ النقطةِ بَ هي (....،....)

إحداثياتُ النقطةِ جـَ هي (....،....)

لاحظْ مِنْ خلالِ النّشاطِ السّابقِ أنَّ صورةَ كلٍّ مِنَ النقاطِ:

أ (٥،٢) ، ب (٢،١) ، جـ (٠،٣) بعدَ عمليةِ الانعكاسِ في محورِ السّيناتِ هي:

$ع_{س}$ (٥،٢) ← (٥،– ٢)

$ع_{س}$ (٢،١) ← (٢،– ١)

$ع_{س}$ (٠،٣) ← (٠،– ٣)

ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلّم:

انعكاسُ نقطةٍ في محورِ السّيناتِ يُرمزُ لهُ بالرّمزِ $ع_{س}$ ويُقرأُ: الانعكاسُ في محورِ السّيناتِ.

وانعكاسُ نقطةٍ في محْورِ الصّاداتِ يُرمزُ لهُ بالرّمزِ $ع_{ص}$ ويُقرأُ: الانعكاسُ في محورِ الصّاداتِ.

مثالُ (٢)

جِدْ صُورَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ (٥، ٢) ، ب (–٣، ٥) ، جـ (١، – ٢) ، د (–٤، – ٦)، إذا كانَ محْورُ الانعكاسِ هو محورُ السّيناتِ.

الحلُّ

$ع_{س}$ (٥، ٢) ← (٥، – ٢)

$ع_{س}$ (– ٣،٥) ← (– ٣، – ٥)

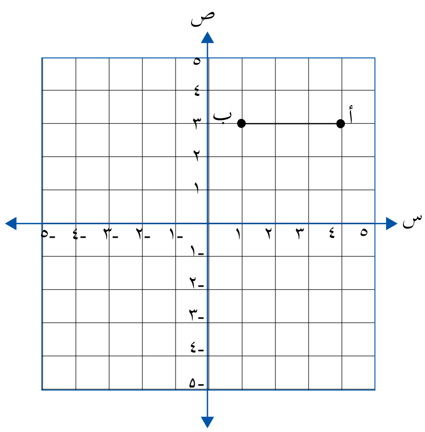
$ع_{س}$ (١، – ٢) ← (١، ٢)

$ع_{س}$ (– ٤، – ٦) ← (–٤، ٦)

تدريبُ (٢)

جِدْ صُورَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ (–١، –٣) ، ب (٢، –٧)، جـ (–٦، ٨)، د (٣، ٤) إذا كانَ محْورُ الانعكاسِ هو محورُ السّيناتِ.

مثالُ (٣)

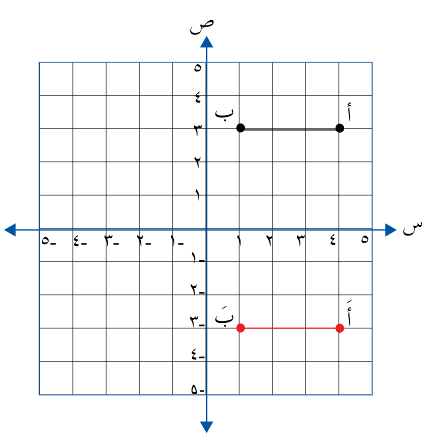


الشّكلُ المجاورُ يبيّنُ التمثيلَ البيانيَّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$ على المستوى البيانيّ، جِدْ كلاًّ مِنَ الآتي:

١) صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$ بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ.

٢) قارنْ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$، وَصورتها بعدَ الانعكاسِ $\overline{\text{أَ بَ}}$.

الحلُّ



١) مِنْ خلالِ الشّكلِ المجاورِ نحدّدُ إحداثياتِ كُلٍّ مِنَ النقطتينِ أ ، ب، فإحداثياتُ النّقطةِ أ هي (٤، ٣)، وإحداثياتُ النّقطةِ ب هي (١، ٣) ثُمّ نجدُ صورةَ كلٍّ مِنَ النقطتينِ أ ، ب بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ.

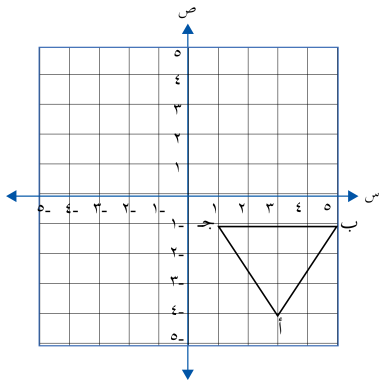
$ع_{س}$ (٤، ٣) ← (٤، –٣)

$ع_{س}$ (١، ٣) ← (١، –٣)

نعينُّ إحداثياتِ النقطتينِ أَ ، بَ، كما في الشّكلِ السّابقِ، فتكونُ صورةُ القطعةِ المستقيمةِ أ ب بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ هي $\overline{\text{أَ بَ}}$.

٢) طولُ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$ = طولَ القطعةِ المستقيمةِ بعدَ الانعكاسِ $\overline{\text{أَ بَ}}$

مثالُ (٤)



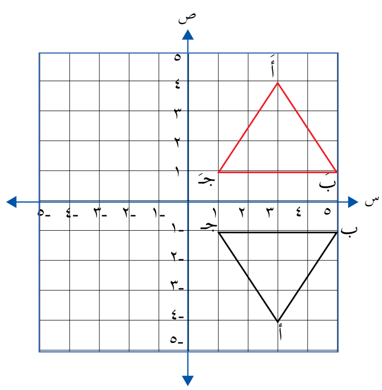
الشّكلُ المجاورُ يبيّنُ التّمثيلَ البيانيَّ للمثلثِ أ ب جـ، جِدْ كلاًّ ممّا يأتي:

١) صورةَ Δ أ ب جـ بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ.

٢) هلْ تغيرّتْ قياساتُ أضلاعِ المثلّثِ بعدَ عمليةِ الانعكاسِ؟

٣) هلْ تغيرتْ قياساتُ زوايا المثلّثِ بعدَ عمليةِ الانعكاسِ؟

الحلُّ



١) مِنْ خلالِ الشّكلِ المجاورِ، نحدّدُ إحداثياتِ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ ، ب ، جـ، وهي:

أ (٣، −٤) ، ب (٥، −١) ، جـ (١، −١) ثُمّ نجدُ صورةَ كلِّ نقطةٍ بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ.

$ع_{س}$ (٣، −٤) ← (٣، ٤)

$ع_{س}$ (٥، −١) ← (٥، ١)

$ع_{س}$ (١، −١) ← (١، ١)

نعيّنُ إحداثياتِ النّقاطِ أَ ، بَ ، جـَ كما في الشّكلِ السّابقِ، فتكونُ صورةُ Δ أ ب جـ بعدَ الانعكاسِ في محور السيناتِ هي Δ أَ بَ جـَ.

٢) باستخدامِ المسطرةِ قُمْ بإيجادِ أطوالِ أضلاعِ Δ أ ب جـ، و Δ أَ بَ جـَ ماذا تلاحظُ؟

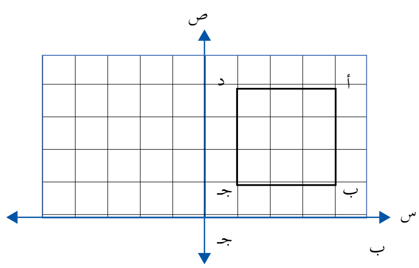
٣) باستخدامِ المنقلةِ قُمْ بإيجادِ قياسِ كلٍّ مِنْ زوايا Δ أ ب جـ، وزوايا Δ أَ بَ جـَ ماذا تلاحظُ؟

تدريبُ ٣

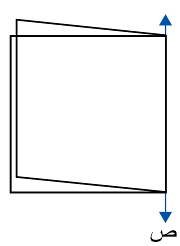
ارسمْ مربّعًا، إحداثياتُ رؤوسهِ: س (٣، ٢)، ص (٣، –٢)، ل (–١، –٢)، ع (–١ ، ٢)، ثُمَّ جِدْ صورةَ المربّعِ س ص ل ع بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ.

نشاطُ (٢)

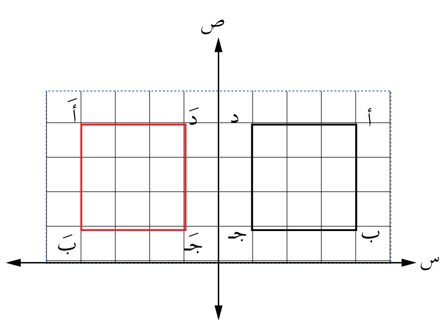
شكْلٌ هندسيٌّ رؤوسهُ: أ (٤، ٤) ، ب (٤، ١) ، جـ (١، ١) ، د (١، ٤) بالاستعانةِ بالمستوى البيانيِّ، نفّذْ كلاًّ ممّا يأتي:



١) عيّنِ النّقاطَ أ، ب، جـ، د على المستوى البيانيِّ، وصِلْ بينها كما في الشّكلِ المجاورِ.



٢) قُمْ بطيِّ المستوى البيانيِّ حولَ محورِ الصّاداتِ، كما في الشّكلِ المجاورِ، ثُمّ ضعْ علامةً باللّونِ الأحمرِ فوقَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ ، ب ، جـ، د مِنَ الجهةِ الظّاهرةِ.



٣) أرجعِ الورقةَ كما كانتْ، ستلاحظُ أنَّهُ نتجتْ صورةٌ لكلِّ نقطةٍ مِنَ النّقاطِ الأربعِ أ، ب ، جـ ، د على الجانبِ الآخرِ وهي: أَ ، بَ ، جَـ ، دَ كما في الشّكلِ المجاورِ:

٤) اكتبْ إحداثياتِ كلٍّ مِنَ النقاطِ أَ ، بَ ، جَـ ، دَ

إحداثياتُ النّقطةِ أَ هي (....،....) وإحداثياتُ النّقطةِ بَ هي (....،....)

إحداثياتُ النّقطةِ جَـ هي (....،....) وإحداثياتُ النّقطةِ دَ هي (....،....)

٥) هلْ تغيّرتْ قياساتُ الشّكلِ الهندسيِّ، أو نوعهِ بعدَ عمليةِ الطيِّ؟

٦) قارنِ المسافةَ بينَ محورِ الصّاداتِ وكلِّ نقطةٍ مبيَّنةٍ، ماذا تلاحظُ؟

لابُدَّ أنك لاحظتَ مِنْ خلالِ النّشاطِ السّابقِ أنَّ صورةَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ:

أ (٤، ٤) ، ب (٤، ١) ، جـ (١، ١) ، د (١، ٤) بعدَ عمليةِ الانعكاسِ في محورِ الصّاداتِ هي:

$ع_{ص}$ (٤، ٤) ← (−٤، ٤)

$ع_{ص}$ (٤، ١) ← (−٤، ١)

$ع_{ص}$ (١، ١) ← (−١، ١)

$ع_{ص}$ (١، ٤) ← (−١، ٤)

ماذا تستنتجُ مما سبقَ؟

مثالُ (٥)

جِدْ صُورَ كلٍّ مِنَ النقاطِ أ(٨،٣) ، ب(− ٩،٧) ، جـ(٥،− ٦) ، د(−١،− ١١) إذا كانَ محورُ الانعكاسِ هو محورُ الصاداتِ؟

الحلُّ

$ع_{ص}$ (٨، ٣) ← (− ٨، ٣)

$ع_{ص}$ (− ٩،٧) ← (٩، ٧)

$ع_{ص}$ (٥،− ٦) ← (− ٥، −٦)

$ع_{ص}$ (− ١،− ١١) ← (١، − ١١)

تدريبُ ٤

جِدْ صُورَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ: أ (− ٨،٥)، ب (٧،− ٤)، جـ (٣،٩)، د (−٢،− ٦)، إذا كانَ محورُ الانعكاسِ هو محْورُ الصّاداتِ.

فكّر وناقش

متى تكونُ صورةُ النّقطةِ أ (س، ص) بعدَ الانعكاسِ هي النّقطةُ أ نفسها؟

تدريبُ ٥

جِدْ كلاًّ ممّا يأتي:

١) $ع_{س}$ (٠، ٢)　　　　٢) $ع_{س}$ (٣، ٠)

٣) $ع_{ص}$ (٠، ٥)　　　　٤) $ع_{ص}$ (٧، ٠)

٥) $ع_{س}$ (٣، −٣)　　　　٦) $ع_{ص}$ (−٨، ٨)

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ صورةَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ الآتيةِ بعدَ الانعكاسِ:

١) في محورِ السيناتِ ٢) في محورِ الصاداتِ

أ) (٠،٥) ب) (−٤،٢) جـ) (٧،−٣) د) (٠،−٢)

٢) حدّدْ محورَ الانعكاسِ في كلٍّ مِنَ الانعكاساتِ الآتيةِ:

أ) أ(− ٢، ١) ← أَ (٢، ١)

ب) ب (٣، ٢) ← بَ (٣، − ٢)

جـ) جـ (− ٤، − ٦) ← جـَ (٤، −٦)

د) د (٠،٠) ← دَ (٠،٠)

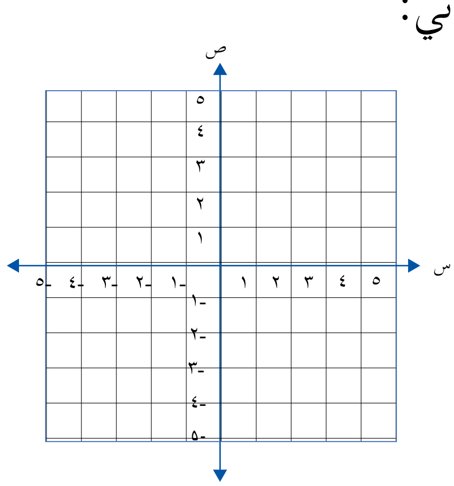
٣) إذا كانتْ $\overline{\text{س ص}}$ قطعةً مستقيمةً، حيثُ س(−٢، ٣) ، ص(٤، −٢)

أ) جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{س ص}}$ بعدَ الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ، وعيّنها على المستوى البيانيِّ.

ب) جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{س ص}}$ بعدَ الانعكاسِ في محورِ الصّاداتِ، وعيّنها على المستوى البيانيِّ.

٤)شكلٌ هندسيٌّ رباعيٌّ رؤوسُهُ: أ (٤، ٣) ، ب (٣، ٠) ، جـ (٠،٠) ، د (١، ٣)

بالاستعانةِ بالمستوى البيانيِّ المجاورِ، أجبْ عمّا يأتي:



أ) عيّنِ النقاطَ أ ب جـ د على المستوى البيانيِّ.

ب) ما اسم الشّكل الهندسي الناتج؟

جـ) جِدْ صورةَ الشّكل أ ب جـ د في:

١) $ع_{س}$ ٢) $ع_{ص}$

الدّرسُ الثّالثُ

الانسحابُ

النتاجات

- تتعرفُ على مفهومِ الانسحابِ، وخواصِّه كتحويلٍ هندسيٍّ.
- تعيّنُ صورةَ نقطةٍ، وقطعةٍ مستقيمةٍ، وشكلٍ هندسيٍّ تحتَ تأثيرِ انسحابٍ معيّنٍ في المستوى الإحداثيِّ.

أقامتْ إحدى مديرياتِ التّربيةِ والتعليمِ بطولةً للعبةِ الشّطرنجِ، حيثُ كانتِ المباراةُ الأولى بينَ أحمدَ ومحمدٍ، وأثناءَ المباراةِ حرَّكَ أحمدُ الحصانَ رقمَ ١، كما في الشّكلِ المجاورِ:

١) صِفِ الحركةَ المتّبعةَ في نقلِ الحصانِ رقم ١ مِنْ موقعٍ إلى آخرَ.

٢) قارنْ بينَ شكلٍ، وحجمٍ، وقياساتِ الحصانِ رقم ١ في وضعهِ الأصليّ، وبعدَ تحريكهِ، ماذا تلاحظُ؟

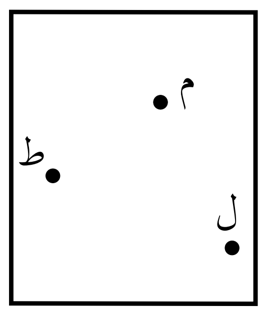
تعلّمتَ في الدّرسِ السّابقِ أنَّ عمليةَ قلْبِ شكلٍ ما حولَ مستقيمٍ معيّنٍ، والحصولَ على صورةِ مرآةٍ لهذا الشّكلِ دونَ أنْ يغيّرَ مِنْ قيّاساتِهِ، أو نوعهِ يسمّى انعكاسًا، ويُعتبرُ الانعكاسُ أحدَ أنواعِ التّحويلاتِ الهندسيّةِ.

ولكنْ إذا أردتَ أنْ تنقلَ شكلًا ما من مكانٍ إلى آخرَ دونَ أنْ تغيّرَ مِنْ قيّاساتهِ أو نوعهِ، كنقلِ مقعدكَ في الصّفِّ مِنْ جهةٍ إلى أخرى، فماذا نُسمّي هذهِ العمليةَ، وهل تُعتبرُ تحويلًا هندسيًّا ، لماذا؟

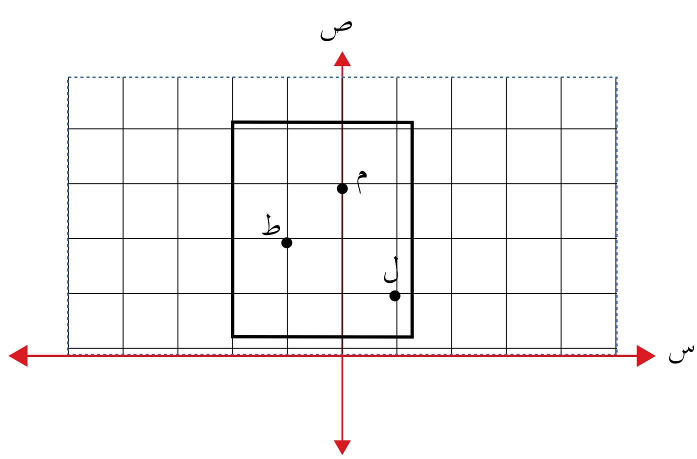
الانسحابُ: هو تحويلٌ هندسيٌّ ينقلُ شكلًا ما مِنْ مكانٍ إلى آخرَ بمقدارٍ معيّنٍ يُسمّى (مقدارَ الانسحابِ)، وباتجاهٍ معيّنٍ يُسمّى (اتجاهَ الانسحابِ) دونَ أنْ يغيّرَ مِنْ قياساتهِ، أو شكلهِ، ويُرمزَ لهُ بالرّمزِ ح.

نشاط (١)

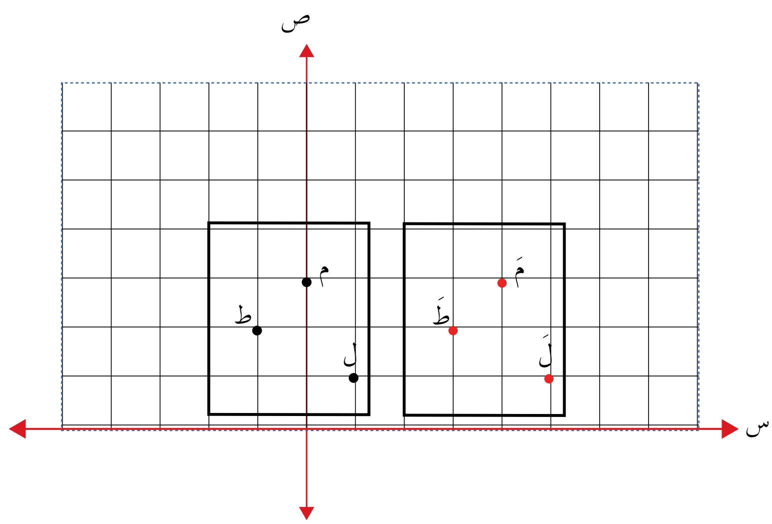
١) قُمْ برسمِ ثلاثِ نقاطٍ على ورقةِ رسمٍ شفّافةٍ كما في الشّكلِ الآتي:



٢) ضَعْ ورقةَ الرّسمِ الشّفافةِ على المستوى البيانيِّ، وعيّنْ للنّقاطِ الثّلاثِ إحداثياتٍ، ولتكنْ م (٠، ٣)، ل (١، ١)، ط (−١، ٢)، كما في الشّكلِ الآتي:



٣) اسحبِ الورقةَ الشّفافةَ فوقَ المستوى البيانيِّ ٤ وحداتٍ إلى اليمينِ، ستلاحظُ أنّهُ نتجتْ صورةٌ لكلِّ نقطةٍ مِنَ النّقاطِ الثّلاثِ م ، ل ، ط بعدَ عمليةِ الانسحابِ وهي مَ ، لَ ، طَ، كما في الشّكلِ الآتي:



٤) اكتبْ إحداثياتِ كلِّ نقطةٍ مِنَ النّقاطِ مَ ، لَ، طَ :

إحداثياتُ النّقطةِ مَ هي: (....،....)

إحداثياتُ النّقطةِ لَ هي :(....،....)

إحداثياتُ النّقطةِ طَ هي: (....،....)

لاحظْ مِنْ خلالِ النشّاطِ السّابقِ أنَّ صورةَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ:

م (٠، ٣) ، ل (١، ١) ، ط (−١، ٢) بعدَ عمليةِ الانسحابِ (٤) وحداتٍ إلى اليمينِ هي:

م (٠، ٣) ← مَ (٠+٤، ٣) = (٤، ٣)

ل (١، ١) ← لَ (١+٤، ١) = (٥، ١)

ط (−١، ٢) ← طَ (−١+٤، ٢) = (٣، ٢)

وبذلكَ فإنَّ:

قاعدةَ الانسحابِ إلى اليمينِ ن وحدةً هي:

ح: (س،ص) ← (س+ن، ص)

نوعُ التّحويلِ الهندسيِّ — النّقطةُ الأصليةُ — صورةُ النّقطةِ

لاحظْ مِنْ خلالِ القاعدةِ السّابقةِ:

أنَّ الانسحابَ إلى اليمينِ يؤثّرُ على الإحداثيِّ السّينيِّ، وذلكَ بإضافةِ مقدارِ الانسحابِ لهُ، لماذا؟

وبناءً على ذلكَ:

- فإنَّ قاعدةَ الانسحابِ إلى اليسارِ ن وحدةً هي:

  ح: (س،ص) ← (س− ن، ص)

- فإنَّ قاعدةَ الانسحابِ إلى الأعلى ن وحدةً هي:

  ح: (س،ص) ← (س، ص + ن)

- فإنَّ قاعدةَ الانسحابِ إلى الأسفلِ ن وحدةً هي:

  ح: (س،ص) ← (س، ص − ن)

تدريبُ ١

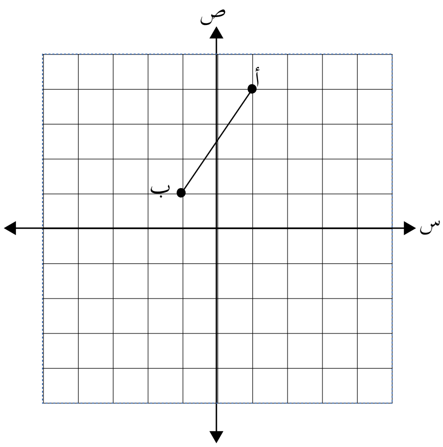
جِدْ صُورَ النّقطةِ (−٣، ٣) تحتَ تأثيرِ كلِّ انسحابٍ مِنَ الانسحاباتِ الآتيةِ:

١) إلى اليمينِ وحدتينِ ٢) إلى اليسارِ ٣وحداتٍ

٣) إلى الأعلى ٤ وحداتٍ ٤) إلى الأسفلِ وحدةً واحدةً

مثالُ (١)

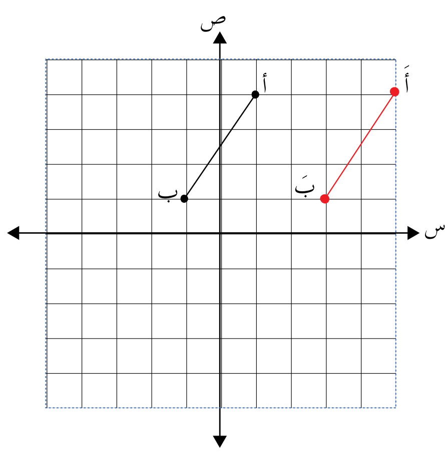
الشّكلُ المجاورُ يبيّنُ التّمثيلَ البيانيَّ للقطعةِ المستقيمةِ أ ب على المستوى البيانيِّ، جِدْ كلًا مِنَ الآتي:



١) صورةَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب بعدَ الانسحابِ إلى اليمينِ ٤ وحداتٍ.

٢) قارنْ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ أ ب، وصورتها بعدَ الانسحابِ أَ بَ.

الحلُّ



١) مِنْ خلالِ الشّكلِ المجاورِ نحدّدُ إحداثياتِ كلٍّ مِنَ النقطتينِ أ ، ب، فإحداثياتُ النّقطةِ أ هي (١، ٤)، وإحداثياتُ النّقطةِ ب هي (−١، ١).

ثُمَّ نجدُ صورةَ كلٍّ مِنَ النّقطتينِ أ ، ب بعدَ الانسحابِ إلى اليمينِ ٤ وحداتٍ.

ح: (س،ص) ← (س+٤، ص) ومنها

ح: أ (١، ٤) ← أَ (١+٤، ٤) = (٥، ٤)

ح: ب (−١، ١) ← بَ (−١+٤، ١) = (٣، ١)

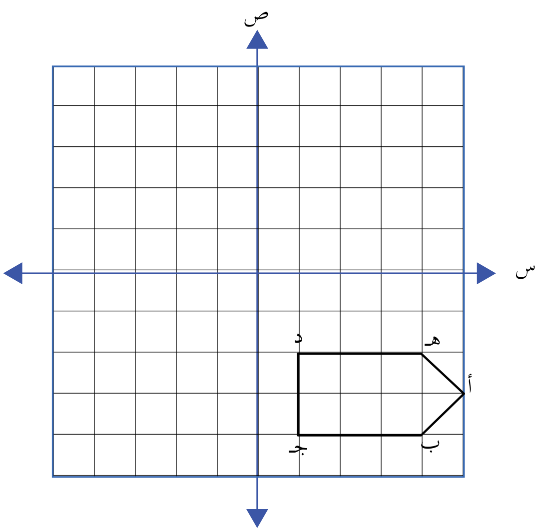
نعيّنُ إحداثياتِ النقطتينِ أَ ، بَ، كما في الشّكلِ السّابقِ.

فتكونُ صورةُ القطعةِ المستقيمةِ أ ب بعدَ الانسحابِ إلى اليمينِ ٤ وحداتٍ هي أَ بَ.

٢) طولُ القطعةِ المستقيمةِ أ ب = طولَ القطعةِ المستقيمةِ بعدَ الانسحابِ أَ بَ.

تدريبُ ٢

الشّكلُ المجاورُ يبيّنُ التمثيلَ البيانيَّ للمضلَّعِ أ ب جـ د هـ، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:



١) صورةَ المضلّعِ أ ب جـ د هـ بعدَ الانسحابِ إلى الأعلى ٦ وحداتٍ.

٢) هلْ تغيرتْ قياساتُ أطوالِ أضلاعِ المضلَّعِ أ ب جـ د هـ بعدَ عمليةِ الانسحابِ؟

٣) هلْ تغيرتْ قياساتُ زوايا المضلّعِ بعدَ عمليةِ الانسحابِ؟

مثالُ (٢)

جِدْ صُورةَ النّقطةِ (−٧، ٩) إذا تَمّ سحبها ٤ وحداتٍ إلى اليمينِ و٣ وحداتٍ إلى الأعلى.

الحلُّ

١) نسحبُ النّقطةَ (−٧، ٩) إلى اليمينِ ٤ وحداتٍ.

قاعدةُ الانسحابِ إلى اليمينِ ٤ وحداتٍ هي:

ح: (س،ص) ← (س+٤، ص) ومنها

ح: (−٧، ٩) ← (−٧+٤، ٩) = (−٣، ٩)

٢) نسحبُ النّقطةَ الجديدةَ (−٣، ٩) إلى الأعلى ٣ وحداتٍ.

قاعدةُ الانسحابِ إلى الأعلى ٣ وحداتٍ هي:

ح: (س،ص) ← (س، ص+٣) ومنها

ح: (−٣،٩) ← (−٣، ٩+٣) = (−٣، ١٢)

ويُمكنُ دمجُ القاعدتينِ معًا بقاعدةٍ واحدةٍ كالآتي:

قاعدةُ الانسحابِ ٤ وحداتٍ إلى اليمينِ و٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي:

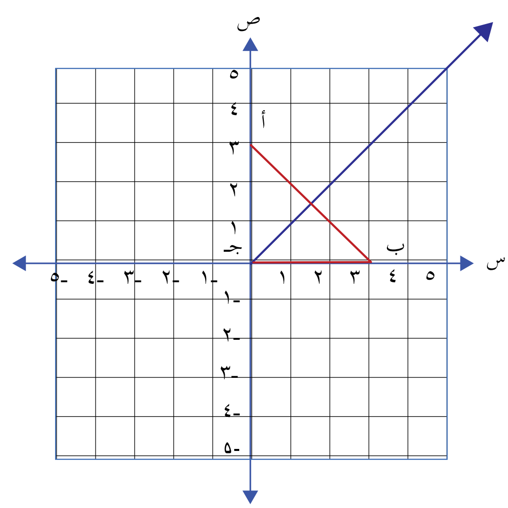
ح: (س،ص) ← (س + ٤ ، ص + ٣)

تدريبُ ٣

ارسمِ المثلّثَ الذي إحداثياتُ رؤوسهِ: أ(٢، −٢) ، ب(٠، ٥) ، جـ(−٣، ٤)، ثُمَّ جِدْ صورةَ المثلّثِ أ ب جـ بعدَ الانسحابِ وحدةً واحدةً إلى الأعلى، و٤ وحداتٍ إلى اليمينِ

فكّر وناقش

اسحبِ المثلّثَ أ ب جـ باتجاهِ الشعاعِ المرسومِ وحدتينِ



تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ صورةَ النّقطةِ (١، ١) تحتَ تأثيرِ كلٍّ مِنَ الانسحاباتِ الآتيةِ:

أ) الانسحابِ إلى اليمينِ ٥ وحداتٍ.

ب) الانسحابِ إلى اليسارِ ٣ وحداتٍ.

جـ) الانسحابِ إلى الأعلى ٤ وحداتٍ.

د) الانسحابِ إلى الأسفلِ وحدتينِ.

٢) حدّدِ اتجاهَ الانسحابِ، ومقدارهُ في كلٍّ مِنَ الانسحاباتِ الآتيةِ:

أ) ح: (– ٢، ١) ← (٢، ١)

ب) ح: (٣، ٢) ← (٣، – ٢)

جـ) ح: (– ٤، – ٦) ← (–٧، –٦)

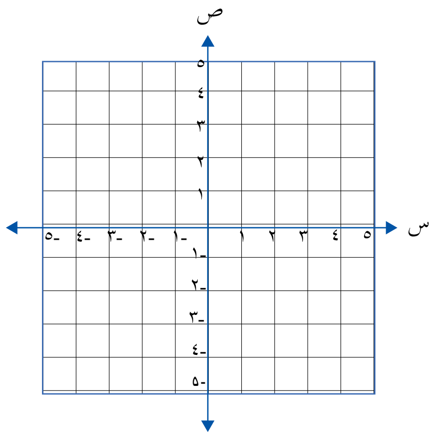
د) ح: (٦، ٣) ← (٢، ٦)

٣) إذا كانتْ $\overline{\text{س ص}}$ قطعةً مستقيمةً، حيثُ س(١، –٢) ، ص(١، ٤)، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{س ص}}$ بعدَ الانسحاب ٣ وحداتٍ إلى اليسارِ، وَ٥ وحداتٍ إلى الأعلى، وعيّنها على المستوى البيانيِّ.

ب) جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{س ص}}$ بعدَ الانسحابِ ٤ وحداتٍ إلى اليمينِ، ووحدتينِ إلى الأسفلِ، وعيّنها على المستوى البيانيِّ.

٤) متوازي أضلاعٍ رؤوسهُ أ (٤، ٣) ، ب (٣، ٠)، جـ (٠،٠) ، د (١، ٣)، بالاستعانةِ بالمستوى البيانيِّ في الشكل المجاورِ أجبْ عمّا يأتي:



أ) عيّنِ النقاطَ: أ، ب، جـ، د

ب) جِدْ صورةَ متوازي الأضلاعِ أ ب جـ د بَعْد الانسحاب ٣ وحداتٍ لليمينِ وَ٤ وحداتٍ للأسفلِ.

٥) مثلّثٌ رؤوسهُ: (-١، ١) ، (١، ٣) ، (٤، -٢)، أصبحتْ رؤوسُ المثلّثِ بعدَ التّحويلِ الهندسيِّ: (٣، ٣) ، (٥، ٥) ، (٨، ٠) على الترتيبِ، صِفْ نوعَ التحويلاتِ الهندسية التي حصلت للمثلّثِ.

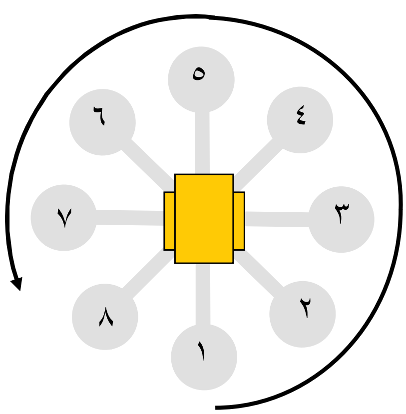
الدّرسُ الرّابعُ

الدّورانُ

النتاجات

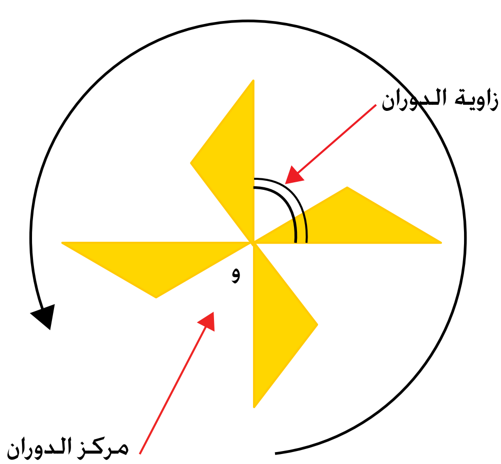
- تتعرفُ مفهومَ الدَورانِ، وخواصَّهُ كتحويلٍ هندسيٍّ.
- تُعيّنُ صورةَ نقطةٍ، وقطعةٍ مستقيمةٍ، وشكلٍ هندسيٍّ تحتَ تأثيرِ دورانٍ معيّنٍ في المستوى الإحداثيِّ.

زار حمزةُ وعائلتهُ مدينةَ الملاهي، فرأى ثمانيَ عرباتٍ مرقّمةٍ تدورُ حولَ دولابٍ كما في الشّكلِ المجاورِ، فصعدَ إلى العربةِ رقمَ ١، ما موقعُ عربةِ حمزةَ إذا دارَ الدّولابُ باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ:



١) ربعَ دورةٍ   ٢) نصفَ دورةٍ
٣) ثلاثةَ أرباعِ الدّورةِ   ٤) دورةً كاملةً

تعرّفتَ سابقًا على بعضِ التّحويلاتِ الهندسيّةِ مثلِ: الانعكاسِ والانسحابِ، ماذا لو أردنا أنْ ندوّرَ شكلًا ما حولَ نقطةٍ معيّنةٍ، و باتجاهٍ معيّنٍ، وزاويةٍ معيّنةٍ، دونَ أنْ نغيّرَ مِنْ قياساتهِ،كما في الشّكلِ المجاورِ، فماذا نُسمّي هذه العمليةَ؟ وهلْ تُعتبرُ تحويلًا هندسيًّا ، لماذا؟

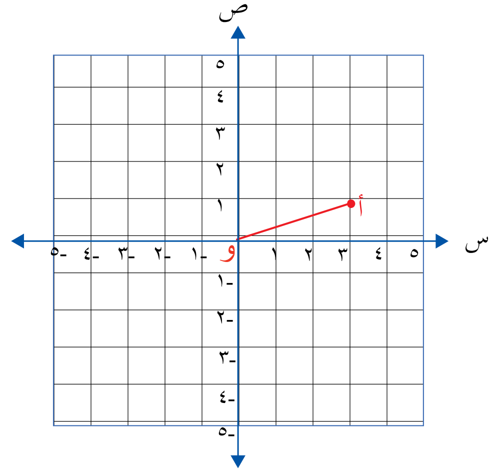


الدَوْرانُ: هو تحويلٌ هندسيٌّ يدوِّرُ شكلاً ما حولَ نقطةٍ ثابتةٍ تُسمّى (مركزَ الدورانِ)، وباتجاهٍ معيّنٍ يُسمّى (اتجاهَ الدّورانِ)، وبزاويةٍ معيّنةٍ تُسمّى (زاويةَ الدّورانِ) دونَ أنْ يغيّرَ ذلكَ مِنْ قياساتِ الشّكلِ، ويرمزُ له بالرّمزِ $د_و$.

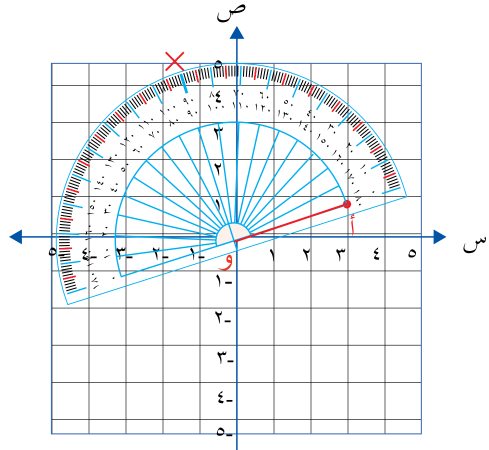
نشاطُ (١)

النّقطةُ أ إحداثياتها: (٣، ١)، بالاستعانةِ بالمستوى البيانيِّ، نفّذْ كلًّا مِمّا يأتي:

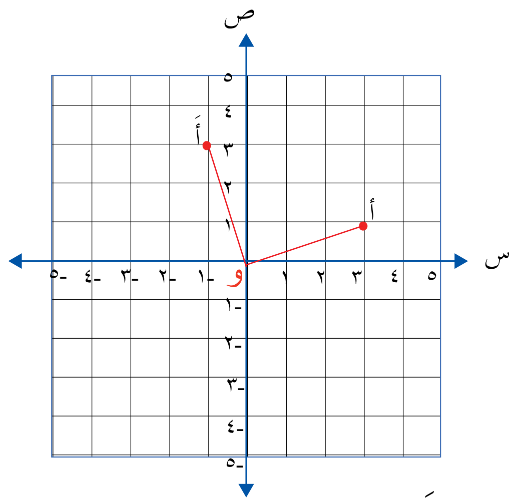
١) عيّنِ النقطةَ أ على المستوى البيانيِّ، وصِلْ بينها وبينَ نقطةِ الأصلِ، كما في الشّكلِ الآتي:



٢) قُمْ بوضعِ المنقلةِ على نهايةِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{وأ}$ مِنْ جهةِ و، ثُمَّ حدّدْ قياسَ الزّاويةِ ٩٠° على المنقلةِ، وضَعْ إشارةَ (×)؛ كما في الشّكلِ الآتي:



٣) صِلْ باستخدامِ المسطرةِ بينَ النّقطةِ و، وإشارةِ (×) بنفسِ طولِ $\overline{\text{أ و}}$، لتنتجَ القطعةُ $\overline{\text{أَ و}}$، كما في الشّكلِ الآتي:



٤) اكتبْ إحداثياتِ النّقطةِ أَ.

لاحظْ مِنْ خلالِ النّشاطِ السّابقِ أنَّ صورةَ النّقطةِ أ (٣، ١) بعدَ الدوّرانِ ٩٠°، باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ هي أَ (−١، ٣).

وبذلكَ فإنَّ:

قاعدةَ دورانِ النّقطةِ (س،ص) ٩٠° ، باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ هي:

$د_{و}$ (٩٠°): (س،ص) ← (− ص، س)

نوعُ التّحويلِ الهندسيّ زاويةُ الدّورانِ النّقطةُ الأصليةُ صورةُ النّقطة

مركزُ الدّورانِ

وبتنفيذِ النّشاطِ السّابقِ على كلٍّ مِنَ الزوايا: ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°

- قاعدةُ دورانِ النّقطةِ (س، ص) ١٨٠° باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ هي:

$د_{و}$ (١٨٠°): (س،ص) ← (.........،.........)

- قاعدةُ دورانِ النّقطةِ (س، ص) ٢٧٠° ، باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ هي:

$د_و$(٢٧٠°): (س،ص) ← (.........،.........)

- قاعدةُ دورانِ النّقطةِ (س، ص) ٣٦٠° ، باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ هي:

$د_و$(٣٦٠°): (س،ص) ← (.........،.........)

مثالُ (١)

جِدْ صُورَ النّقطةِ (١ ، ٣) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِه (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها:

١) ٩٠° ٢) ١٨٠° ٣) ٢٧٠° ٤) ٣٦٠°

الحلُّ

١) $د_و$(٩٠°): (١ ، ٣) ← (–٣ ، ١)

٢) $د_و$(١٨٠°): (١ ، ٣) ← (–١ ، –٣)

٣) $د_و$(٢٧٠°): (١ ، ٣) ← (٣ ، –١)

٤) $د_و$(٣٦٠°): (١ ، ٣) ← (١ ، ٣)

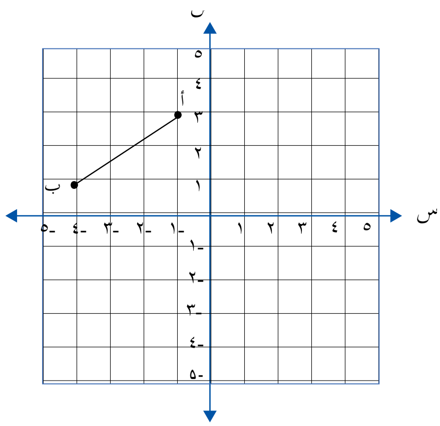
تدريبُ (١)

جِدْ صُورَ النقطةِ (–٢، ٥) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِه (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها:

١) ٩٠° ٢) ١٨٠° ٣) ٢٧٠° ٤) ٣٦٠°

مثالُ (٢)

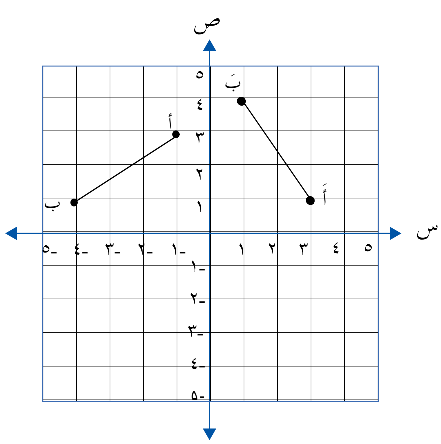
الشّكلُ المجاورُ يبيّنُ التّمثيلَ البيانيَّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:



١) صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$ تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها ٢٧٠°

٢) قارنْ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$، وصورتها بعدَ الدورانِ $\overline{\text{أَ بَ}}$.

الحلّ



١) مِنْ خلالِ الشّكلِ المجاورِ، نحدّدُ إحداثياتِ كلٍّ مِنَ النقطتينِ أ ، ب، فإحداثياتُ النّقطةِ أ هي (−١، ٣)، وإحداثياتُ النّقطةِ ب هي (−٤، ١)،

٢) ثُمَّ نجدُ صورةَ كلٍّ مِنَ النّقطتينِ أ ، ب تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ، بزاويةٍ قياسها ٢٧٠°

د$_{\text{و}}$(٢٧٠°): أ (−١، ٣) ← أَ (٣، ١)

د$_{\text{و}}$(٢٧٠°): ب (−٤، ١) ← بَ (١، ٤)

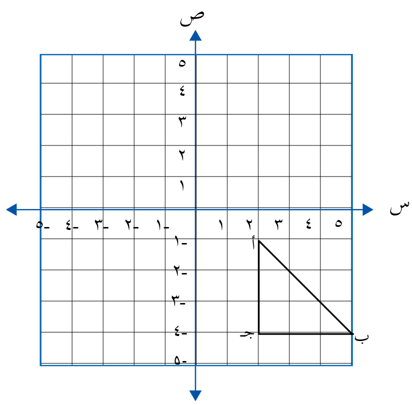
نُعيّنُ إحداثياتِ النّقطتينِ أَ ، بَ كما في الشّكلِ السّابقِ، فتكونُ صورةُ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أ ب}}$ بعدَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها ٢٧٠° هي $\overline{\text{أَ بَ}}$.

٢) طولُ القطعةِ المستقيمةِ أ ب = طولَ القطعةِ المستقيمةِ أَ بَ.

مثالُ (٣)

الشّكلُ المجاورُ يبيّنُ التمثيلَ البيانيَّ للمثلّثِ أ ب جـ جِدْ كلًا ممّا يأتي:

١) صورةَ Δ أ ب جـ، تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزه (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ، بزاويةٍ قياسها ١٨٠°.



٢) قارنْ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلّثِ قبلَ الدّورانِ وبعدهُ.

٣) قارنْ بينَ قياساتِ زوايا المثلّثِ قبلَ الدّورانِ وبعدهُ.

الحلُّ

١) لإيجادِ صورةِ Δ أ ب جـ تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزه (نقطةِ الأصل) باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ بزاويةٍ قياسها ١٨٠°، اتبعِ الخطواتِ الآتيةَ:

أ) حَدّدْ إحداثياتِ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ ، ب ، جـ، فإحداثياتُ النّقطةِ أ هي (٢، − ١)، وإحداثياتُ النّقطةِ ب هي (٥، − ٤)، وإحداثياتُ النّقطةِ جـ هي (٢، − ٤)

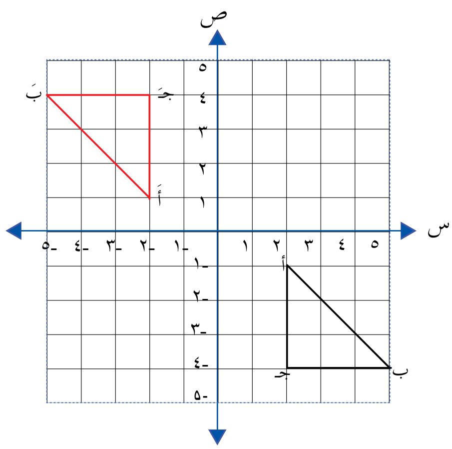
ب) جِدْ صورةَ كلٍّ مِنَ النّقاطِ أ ، ب ، جـ تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزه (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ، بزاويةٍ قياسها ١٨٠°

د$_{و}$(١٨٠°): (٢، −١) ← (−٢، ١)

د$_{و}$(١٨٠°): (٥، −٤) ← (−٥، ٤)

د$_{و}$(١٨٠°): (٢، −٤) ← (−٢، ٤)

جـ) عيّنْ إحداثياتِ النّقاطِ: أَ ، بَ ، جَـ كما في الشّكلِ المجاورِ، فتكونُ صورةُ Δ أ ب جـ بعدَ تأثيرِ دورانِ مركزه (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ، بزاويةٍ قياسها ١٨٠° هي Δ أَ بَ جَـ.



٢) باستخدامِ المسطرةِ، قُمْ بإيجادِ أطوالِ أضلاعِ Δ أ ب جـ، وأطوالِ أضلاعِ Δ أَ بَ جَـ، ماذا تلاحظُ؟

٣) باستخدامِ المنقلةِ، قُمْ بإيجادِ قياساتِ زوايا Δ أ ب جـ ، وقياساتِ زوايا Δ أَ بَ جَـ، ماذا تلاحظُ؟

تدريبُ ٢

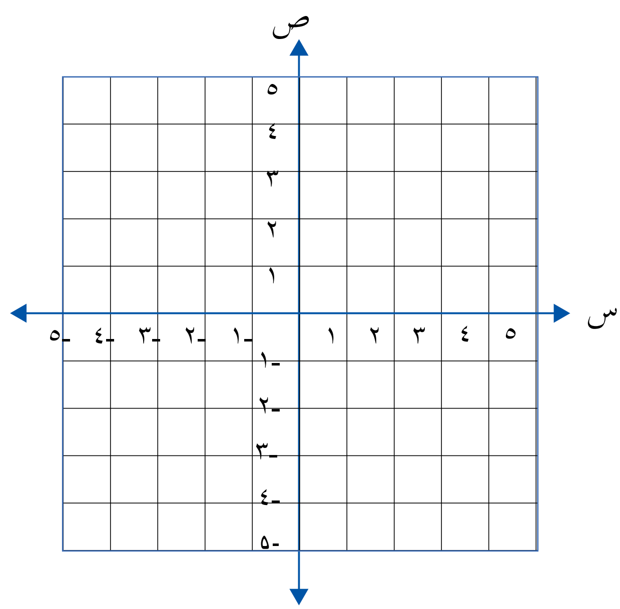
إذا كانتْ $\overline{\text{ل م}}$ قطعةً مستقيمةً، حيثُ ل (١، ٠) ، م (٠، ٤)، جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{ل م}}$ تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزه (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ، بزاويةٍ قياسها ١٨٠°.

تدريبُ ٣

مربّعٌ رؤوسهُ: أ(٢، ٢) ، ب (٢، −٢) ، جـ (−٢،−٢)، د (−٢، ٢) بالاستعانةِ بالمستوى البيانيِّ الآتي، أجبْ عمّا يأتي:

١) عيّنِ النقاطَ أ ب جـ د على المستوى البيانيِّ.

٢) جِدْ صورةَ المربّعِ أ ب جـ د تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها ٢٧٠°



تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ صُورَ النّقطةِ (−١، ٣) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها:

أ) ٩٠° ب) ١٨٠° جـ) ٢٧٠° د) ٣٦٠°

٢) إذا علمت أن مركز الدوران (نقطةِ الأصلِ) وإتجاههِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ، حدّدْ زاويةَ الدورانِ في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) أ(−٢،١) ← أَ (−٢، −١)

ب) ب(٢،٣) ← بَ (−٢، −٣)

جـ) جـ(− ٤، − ٦) ← جـَ (٦، −٤)

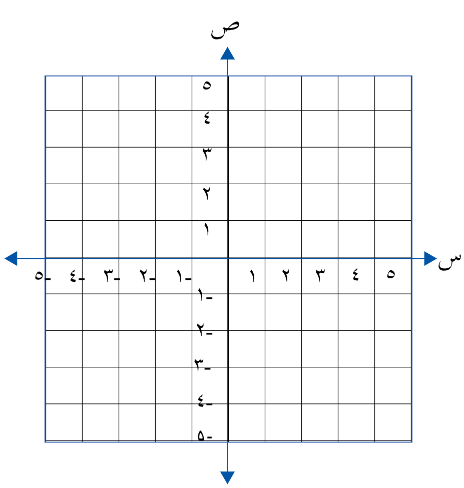
د) د(٠، $\overline{١}$) ← دَ (١، ٠)

٣) إذا كانتْ $\overline{م ن}$ قطعةً مستقيمةً، حيثُ م (٤، −٤) ، ن (−٤، ٤)، جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ م ن تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ، بزاويةٍ قياسها ٢٧٠°.

٤) مربّعٌ رؤوسهُ: أ (٣، ٣) ، ب (٣، −٣) ، جـ (−٣،−٣) ، د (−٣، ٣)، بالاستعانةِ بالمستوى البيانيِّ:

أ) عيّنِ النّقاطَ أ ب جـ د على المستوى البيانيِّ.

ب) جِدْ صورةَ المربّعِ أ ب جـ د تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ بزاويةٍ قياسها ١٨٠°.



مراجعةٌ

١) املأِ الفراغَ للحصولِ على عبارةٍ صحيحةٍ في كلِّ فقرةٍ من الفقراتِ الآتيةِ :

أ) إذا كانَ التحّويلُ الهندسيُّ ت ينقلُ النّقطةَ أ إلى أَ، و ينقلُ النّقطةَ ب إلى بَ فإنَّ:

طولَ $\overline{\text{أ ب}}$ .... طول $\overline{\text{أَ بَ}}$.

ب) صورةُ النّقطةِ (٣، −٢) في الانعكاسِ في محْورِ السّيناتِ هي النقطةُ (....،....)

جـ) صورةُ النّقطةِ (−١، ٧) في الانعكاسِ في محْورِ الصّاداتِ هي النّقطةُ (....،....)

د) في التّحويلِ الهندسيِّ ح: (س،ص) ← (س+١، ص−٥) صورةُ النّقطةِ (−١، ٧) هي (....،....) وَ صورةُ النّقطةِ (٢، −٦) هي (....،....)

هـ) صورةُ النّقطةِ (٨، −٤) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِهِ (نقطةِ الأصلِ) باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها ٢٧٠° هي (....،....)

٢) إذا كانتْ $\overline{\text{س ص}}$ قطعةً مستقيمةً، حيثُ س (−٥، −٢) ، ص (٢، −١) جِدْ صورةَ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{س ص}}$ تحتَ تأثيرِ الانسحابِ ٣ وحداتٍ إلى اليسارِ، و ٥ وحداتٍ إلى الأعلى، وعيّنها على المستوى البيانيِّ.

٣) أ ب جـ مثلثٌ متطابقُ الأضلاعِ، (و) مركزُ هذا المثلّثِ، عيّنْ صُورَ النُّقطِ: أ، ب، جـ في كلٍّ مِنَ الدورانات الآتيةِ:

(عِلمًا أنَّ الدورانَ باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ)

أ) د$_{\text{و}}$(٩٠°) ب) د$_{\text{و}}$(١٨٠°) جـ) د$_{\text{و}}$(٢٧٠°) د) د$_{\text{و}}$(٣٦٠°)

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) هذا السؤالُ يتكوّنُ من ٤ فقراتٍ مِنْ نوعِ الاختيار مِنْ متعدّدٍ، كلُّ فقرةٍ لها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصّحيحِ في ما يأتي:

(١) التّحويلُ الهندسيُّ الذي يحافظُ على قياسِ الأطوالِ:

أ) الانعكاسُ   ب) الأنسحابُ   جـ) الدورانُ   د) جميعُ ما ذُكِرَ

(٢) ع$_{س}$ (−٢، −٥) هي:

أ) (−٢، −٥)   ب) (٢، −٥)   جـ) (−٢، ٥)   د) (٢، ٥)

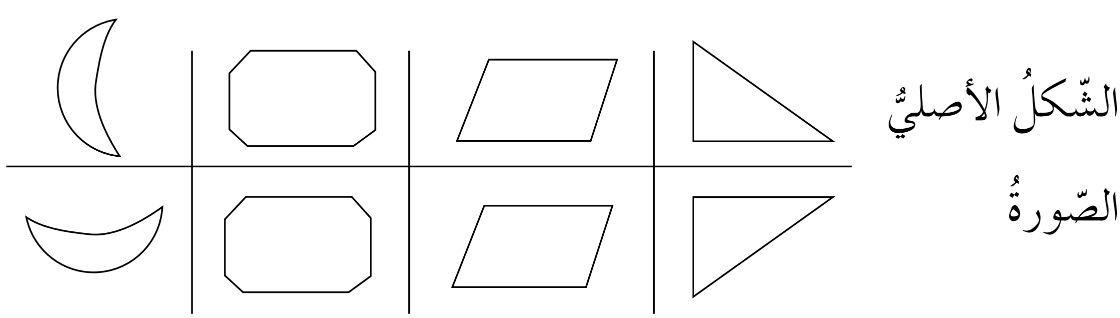
(٣) ع$_{ص}$ (٤، −٤) هي:

أ) (٤، ٤)   ب) (−٤، ٤)   جـ) (٤، −٤)   د) (−٤، −٤)

(٤) دو(٩٠°): (٧، −٣) هي:

أ) (٣، ٧)   ب) (٧، ٣)   جـ) (−٣، ٧)   د) (−٧، ٣)

٢) عيّنِ التحويلَ (التحويلاتِ) التي تنقلُ كلَّ شكلٍ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ إلى صورتها المبيّنةِ بالرّسمِ:



٣) ارسمِ الشّكلَ الهندسيَّ أ ب جـ د في المستوى الإحداثيِّ حيثُ أ (١، ٠) ب (١، ٥)، جـ (−١، ١)، د (−١، ٥)، ثُمَّ جِدْ صورتَهُ، وارسمهُ في المستوى الإحداثيِّ بالتحويلاتِ الهندسيّةِ الآتيةِ:

أ) الانعكاسِ في محورِ السّيناتِ. ب) الانعكاسِ في محورِ الصّاداتِ.

جـ) انسحابٍ إلى اليمينِ ٤ وحداتٍ. د) انسحابٍ إلى اليسارِ وحدتينِ.

هـ) دورانٍ حولَ نقطةِ الأصلِ باتجاهِ عكسِ عقاربِ السّاعةِ بزاويةٍ قياسها ٢٧٠°

٨

الوحدةُ الثامنة

الإحصاءُ

لِعلمِ الإحصاءِ فوائدُ كثيرةٌ منها: جمعُ البياناتِ، وتنظيمها، وتلخيصها، وعرضها، وتحليلها، وذلكَ للوصولِ إلى نتائجَ موثوقةٍ لدعمِ اتخاذِ قراراتٍ سليمةٍ في ضَوْءِ هذا التّحليلِ.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- إيجادِ المتوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ مُعطاةٍ.
- إيجادِ الوسيطِ لبياناتٍ مُعطاةٍ.
- إيجادِ المنوالِ لبياناتٍ مُعطاةٍ.
- إيجادِ المدى لبياناتٍ مُعطاةٍ.
- إيجادِ الانحرافِ المعياريِّ لبياناتٍ مُعطاةٍ.
- إيجادِ التباينِ لبياناتٍ مُعطاةٍ.

الدرسُ الأوّلُ

المتوسطُ الحسابيُّ

النتاجات

- تتعرفُ مقاييسَ النزّعةِ المركزيّةِ.
- تجدُ المتوسطَ الحسابيَّ لبياناتٍ عدديّةٍ.

سُجّلتْ درجاتُ الحرارةِ يوميًا لمدةِ أسبوعٍ، فكانتْ كما يأتي:

٣٤°، ٣٢°، ٣٣°، ٣٢°، ٣٥°، ٣٢°، ٣٣°

١) ما معدلُ درجاتِ الحرارةِ المسجّلةِ؟

٢) ما هي درجةُ الحرارةِ الأكثرُ تكرارًا؟

٣) رتّبْ درجاتِ الحرارةِ تصاعديًّا، ثُمّ جِدْ درجةَ الحرارةِ التي تتوسطُ القيمَ؟

تُستخدمُ المقاييسُ الإحصائيةُ لوصفِ البياناتِ الكميةِ، ومِنْ هذهِ المقاييسِ ما يُسمّى **مقاييسَ النّزعةِ المركزيّةِ** (المتوسطَ الحسابيَّ، الوسيطَ، المنوالَ).

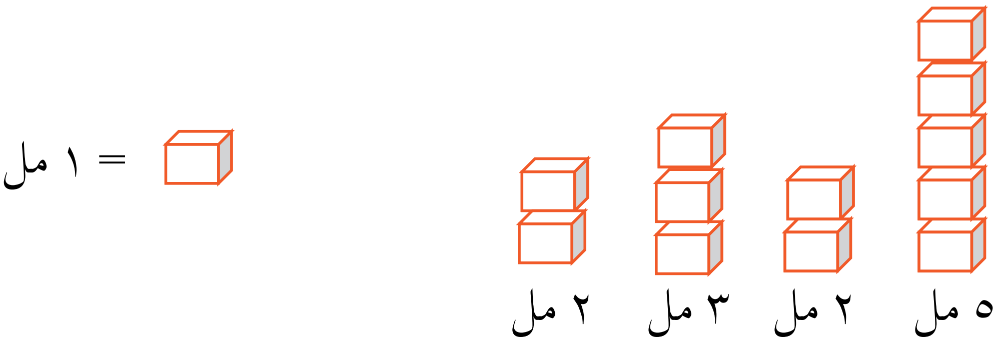
وهي مقاييسُ إحصائيةٌ تُستخدمُ لقياسِ موضعِ التركّزِ، أو تجمّعِ البياناتِ العدديّةِ، إذ أنَّ بياناتِ أيِّ ظاهرةٍ تنزعُ للترّكّزِ، والتّجمّعِ نحوَ قيمٍ محدّدةٍ.

نشاطٌ

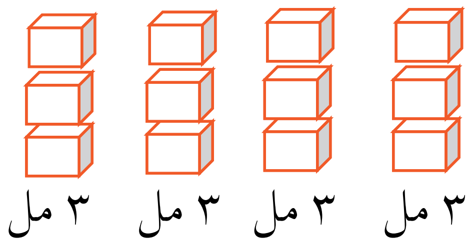
سُجّلتْ كمياتُ الأمطارِ التي هطلتْ في مدينةِ إربدَ على مدارِ ٤ أيامٍ، فكانتْ على النّحوِ الآتي:

٥ مل، ٢مل، ٣مل، ٢مل.

يُمكنُ التّعبيرُ عنْ كمياتِ الأمطارِ بالنّموذجِ الآتي:



حرّكِ المكعباتِ لتحصلَ على الارتفاعِ نفسهِ، فتحصلَ على ما يأتي:



ماذا تَمثّلُ الكميةُ ٣مل؟

لإيجادِ معدّلِ الأمطارِ التي هطلتْ، نقومُ بجمْعِ كميةِ الأمطارِ، وقسمةِ النّاتجِ على عددِ الأيامِ كما يأتي:

معدّلُ كميةِ الأمطارِ = $\frac{٥+٢+٣+٢}{٤}$ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣مل

ويُمكنُ التّعبيرُعنِ المعدّلِ في بعضِ الأحيانِ بأحدِ مقاييسِ النّزعةِ المركزيّةِ وهو **المتوسطُ الحسابيُّ** حيثُ:

المتوسطُ الحسابيُّ لعددٍ مِنَ القيمِ = $\frac{\text{مجموعَ القيمِ}}{\text{عددِ القيمِ}}$

ويُرمزُ للمتوسطِ الحسابيِّ بالرمزِ ($\bar{\text{س}}$)، ولمجموعِ قيمِ س بالدمزِ ($\sum$س)، ولعددِ القيمِ بالرمزِ (ن)، أي إنَّ:

المتوسطَ الحسابي = $\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$

مثالُ (١)

الجدولُ الآتي يبيّنُ قيمةَ الصدقاتِ اليوميّةِ التي تقدّمها الطالبةُ مُنى لصندوقِ الطّالبِ الفقيرِ:

اليومُ	الأحدُ	الاثنينُ	الثلاثاءُ	الأربعاءُ	الخميسُ
المبلغُ بالقروشِ	١٥	٥	١٠	١٥	٥

جدِ المتوسطَ الحسابيَّ لقيمةِ الصدقاتِ.

الحلُّ

$$\text{المتوسطُ الحسابيُّ لقيمةِ الصدقاتِ} = \frac{\text{مجموعَ ما تصدقت بهِ}}{\text{عددِ الأيامِ}}$$

$$= \frac{١٥ + ٥ + ١٠ + ١٥ + ٥}{٥} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠ \text{ قروشٍ}$$

تدريبُ (١)

إذا كانتْ أعمارُ موظّفي إحدى الشّركاتِ على النّحو الآتي: ٤٢، ٤٠، ٣٥، ٣٢، ٢٨، ٢٨

جدِ المتوسطَ الحسابيَّ لأعمارِ الموظّفينَ.

تدريبُ (٢)

جِدِ المتوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ الواردةِ في بدايةِ الدّرسِ.

تعلم:

يمكن استخدامُ برنامجِ Excel في إيجاد المتوسطِ الحسابيِّ لعددٍ من القيمِ.

تدريبُ ٣

إذا كانَ المصروفُ اليوميُّ لـ ٥ طلابٍ بالقروشِ: ٣٥، ٣٠، ٢٠، ٢٥، ٤٠، احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لمصروفهم.

مثالُ (٢)

إذا كان المتوسطُ الحسابيُّ لأوزانِ ٥ طلابٍ ٢٥ كغ، ما مجموعُ أوزانهم؟

الحلُّ

$$\text{المتوسطُ الحسابيُّ} = \frac{\text{مجموعَ الأوزانِ}}{\text{عددِ الطلبةِ}} = ٢٥$$

$$\text{ومنهُ}\quad \frac{\text{مجموعُ الأوزانِ}}{٥} = \frac{٢٥}{١}$$

$$\text{مجموعُ الأوزانِ} \times ١ = ٢٥ \times ٥$$

$$\text{مجموعُ الأوزانِ} = ١٢٥ \text{ كغ}$$

$$\text{للتّحقّقِ:}\quad \frac{\text{مجموعُ الأوزانِ}}{\text{عددِ الطّلبةِ}} = \text{المتوسطَ الحسابيَّ} = \frac{١٢٥}{٥} = ٢٥$$

تذكّرْ:

$$\text{إذا كانَ}\quad \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$$

$$\text{فإنَّ:}\quad أ \times د = جـ \times ب$$

بالضّربِ التّبادليِّ

تدريبُ ٤

إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لعددِ ساعاتِ الدّراسةِ اليوميّةِ لعددٍ منَ الطّلبةِ ساعتينِ، وكانَ المجموعُ الكليُّ لعددِ ساعاتِ الدّراسةِ لهم يساوي ١٨ ساعةً، ما عددُ الطّلبةِ؟

مثالُ (٣)

يبينُ الجدولُ الآتي أطوالَ لاعبي فريقٍ لكرةِ السّلةِ:

الطّولُ (سم)	١٨٩	١٩٥	١٩٢	١٨٥
عددُ اللاعبينَ	٣	٢	٣	٢

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ اللاعبينَ.

الحلُّ

لدينا ٣ لاعبينَ، كلُّ لاعبِ منهم طوله ١٨٩ سم،

إذنْ: مجموعُ أطوالهم = ٣×١٨٩=٥٦٧ سم

لدينا لاعبانِ، كلُّ لاعبٍ منهما طولُه ١٩٥ سم،

إذنْ: مجموعُ أطوالهم = ٢×١٩٥=٣٩٠ سم

لدينا ٣ لاعبينَ، كلُّ لاعبٍ منهم طولهُ ١٩٢ سم، إذنْ: مجموعُ أطوالهم = ...

لدينا لاعبينَ كلُّ لاعبٍ منهم طولهُ ١٨٥ سم، إذنْ: مجموعُ أطوالهم = ...

$$\text{المتوسطُ الحسابيُّ} = \frac{\text{مجموعَ الأطوالِ}}{\text{عددِ اللاعبينَ}}$$

$$= \frac{٥٦٧ + ٣٩٠ + ٥٧٦ + ٣٧٠}{٣ + ٣ + ٢ + ٢} = \frac{١٩٠٣}{١٠} = ١٩٠,٣ \text{سم}$$

فكّر

هلْ يُمكنُ حلُّ المثالِ السّابقِ بطريقةٍ أخرى؟

تدريبُ ٥

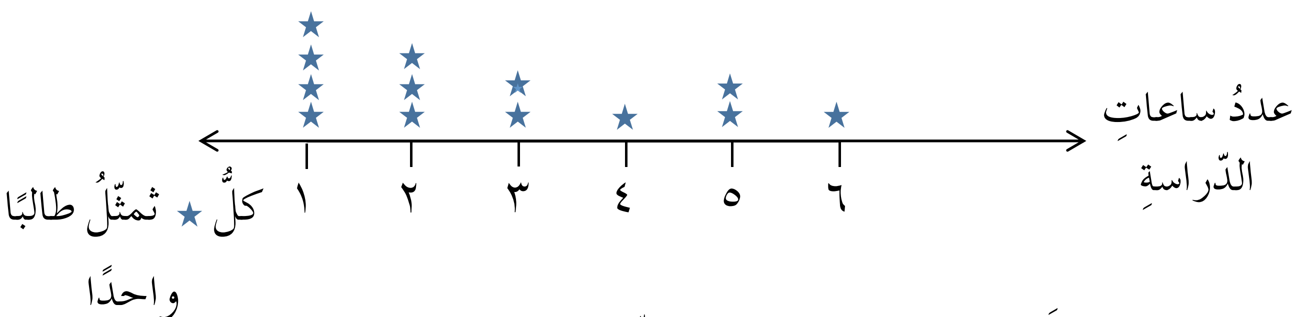
قامَ أحدُ الباحثينَ بتسجيلِ أوزانِ أطفالٍ حديثي الولادةِ في أحدِ المستشفياتِ، ونظمها في الجدولِ الآتي:

الوزنُ (كغ)	٣	٣,٤	٣,٥	٣,٧
عددُ الأطفالِ	١	٣	٤	٢

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لأوزانِ الأطفالِ.

تدريبُ ٦

الشّكلُ الآتي يمثّلُ عددَ ساعاتِ الدّراسةِ اليوميةِ لمجموعةٍ مِنَ الطّلابِ:



احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعددِ ساعاتِ الدّراسةِ.

تمارينُ ومسائلُ

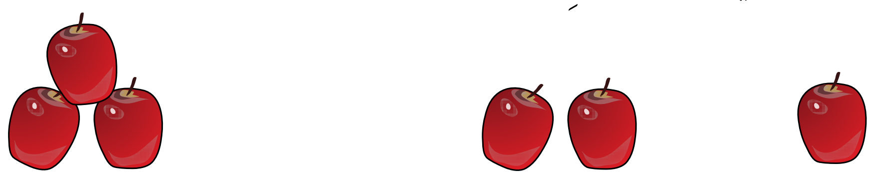
١) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٢، ٣، ٧، ١، ٤، ٨، ١، ٦

ب) ١٥، ١٨، ٢٥، ١٦، ٢٢، ٣٠، ١٥، ٢٤، ٢٩، ٢٦

جـ) ٧,٥ ، ٥، ١,٥، ٠، ٦ ، ٣,٢، ١، ٥، ٢,٨

٢) لدى جنى ست تفاحاتٍ، أكلتْ في اليوم الأولِ تفاحةً، وفي اليومِ الثاني تفاحتَينِ وفي اليومِ الثّالثِ ثلاثَ تفاحاتٍ، هلْ بإمكانِ جنى أنْ تأكلَ كلَّ يومٍ نَفْسَ العددِ مِنَ هذهِ التفاحاتِ في تلكَ الأيامِ الثلاثةِ؟ برّرْ إجابتكَ.



٣) يبيّنُ الجدولُ الآتي علاماتِ الطّالبِ عُمَرَ في ٤ امتحاناتٍ في مبحثِ الرّياضيّاتِ.

(العلامةُ من ١٥ لكلِّ امتحانٍ)

الامتحان	الامتحانُ الأوّلُ	الامتحانُ الثّاني	الامتحانُ الثّالثُ	الامتحانُ الرّابعُ
العلامةُ	١١	١٢	١٣	٩

أ) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ عُمَرَ.

ب) إذا تقدّمَ عُمَرُ لامتحانٍ خامسٍ، ما العلامةُ التي يجبُ أنْ يحصلَ عليها ليصبحَ معدلهُ ١٢؟

٤) يبيّنُ الجدولُ الآتي قيمةَ الصّدقاتِ المقدّمةِ مِنْ طلبةِ الصّفِّ السّابعِ لصالحِ صندوقِ الطّالبِ الفقيرِ:

المبلغُ بالقروشِ	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥
عددُ الطّلابِ	١	٤	٨	٤	٣

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لصدقاتِ الطّلبةِ.

٥) إذا كانَ مجموعُ المصروفِ الشهريِّ لثلاثِ عائلاتٍ ٩٠٠ دينارٍ، ومجموعُ المصروفِ الشهريِّ لأربعِ عائلاتٍ ١٤٠٠ دينارٍ، ومجموعُ المصروفِ الشهريِّ لعائلتينِ ٦٥٠ دينارًا. احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ للمصروفِ الشهريِّ لجميعِ العائلاتِ.

٦) حسبتْ دنيا المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتها في خمسةِ امتحاناتٍ في مادّة العلومِ (النهاية العُظمى لعلامةِ كلِّ امتحانٍ ٢٠) الموضَّحةِ في الجدولِ الآتي:

الامتحانُ	الأوّلُ	الثّاني	الثّالثُ	الرّابعُ	الخامسُ
العلامةُ	١٢	١٣	١٦	١٦	١٨

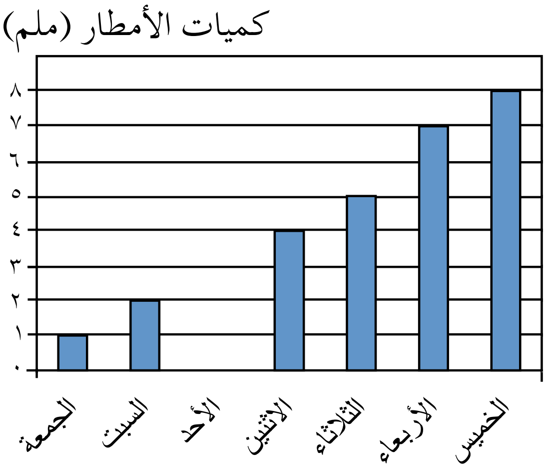
فكانتْ إجابتها: إنهُ يساوي ١٥. هل إجابتها صحيحة؟ برّرْ إجابتكَ.

الدرسُ الثّاني الوسيطُ والمنوالُ

النتاجات

- تجدُ الوسيطَ لبياناتٍ عدديّةٍ.
- تجدُ المنوالَ لبياناتٍ عدديّةٍ.

إذا كانتْ كمياتُ الأمطارِ التي هطلتْ في إحدى المدنِ على مدارِ سبعة أيامٍ مقاسةً بالمليمتر كما في الشّكلِ المجاورِ:



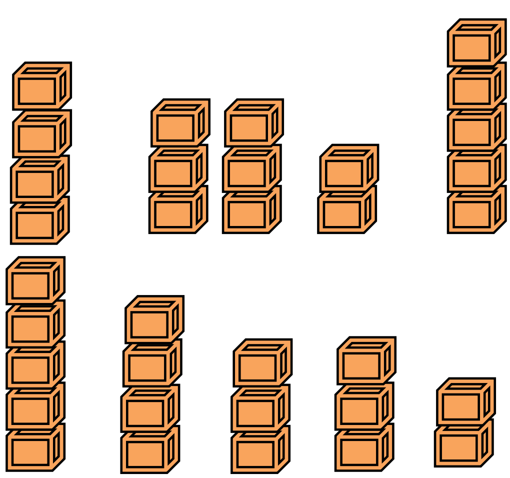
١) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لكمياتِ الأمطارِ.

٢) هلْ يوجدُ مقياسٌ آخرُ غيرُ المتوسطِ الحسابيِّ يساعدُ في وصفِ وتفسيرِ هذه البياناتِ؟

٣) في أيِّ يومٍ كانتْ كميةُ الأمطارِ أكثرَ مِنَ الأيامِ الأخرى؟

٤) في أيِّ يومٍ كانتْ كميةُ الأمطارِ أقلَّ مِنَ الأيامِ الأخرى؟

أولًا: الوسيطُ



ركّبتْ حنينُ مكعباتٍ بشكلٍ رأسيٍّ على النّحوِ الآتي:

ثُمَّ رتّبتِ المكعباتِ مِنَ الأصغرِ إلى الأكبرِ،

كمْ عددُ المكعباتِ التي في وسطِ التّرتيبِ؟

نُسمّي عددَ المكعباتِ التي في وسَطِ التّرتيبِ وسيطًا.

تعريفٌ: الوسيطُ لمجموعةٍ مِنَ الأعدادِ مرتّبةً ترتيبًا تصاعديًّا، أو تنازليًّا، هو العددُ الأوسطُ منها، إذا كانَ عددها فرديًّا، أو المتوسطُ الحسابيُّ للعددينِ الأوسطينِ إذا كان عددُها زوجيًّا.

عبّرْ عنِ التّعريفِ السّابقِ بالرّموزِ، وناقشْ زميلكَ في تعريفهِ.

مثالُ (١)

جِدِ الوسيطَ للقيمِ الآتيةِ:

١) ٢، ٥، ٣، ٧، ٨، ٨، ٩، ٤ ، ١٠

٢) ٢٥، ١٢، ٢٨، ١٩، ٢٣، ٣٠

الحلُّ

١) نرتّبُ القيمَ تصاعديًّا: ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨، ٨، ٩، ١٠، نلاحظُ أنَّ العددَ الأوسطَ هو ٧، إذنْ الوسيطُ = ٧

نلاحظُ أنَّ ترتيبَ الوسيطِ = $\frac{\text{عددَ القيمِ} + ١}{٢}$ = $\frac{٩ + ١}{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

إذا كانَ عددُ القيمِ فرديًّا فإنَّ الوسيطَ بعدَ ترتيبِ القيمِ تصاعديًّا، أو تنازليًّا هو العددُ الذي ترتيبهُ = $\frac{\text{عددَ القيمِ} + ١}{٢}$

٢) نرتّبُ القيمَ تصاعديًّا: ١٢، ١٩، ٢٣، ٢٥، ٢٨، ٣٠، عدُد القيمِ = ٦ وهو عددٌ زوجيّ، إذنْ: الوسيطُ هو المتوسطُ الحسابيُّ للعددينِ الأوسطينِ وهما: ٢٣ ، ٢٥

الوسيطُ = $\frac{٢٣ + ٢٥}{٢}$ = $\frac{٤٨}{٢}$ = ٢٤

نلاحظُ أنَّ الوسيطَ هو المتوسَطُ الحسابيُّ للعددينِ ٢٣، ٢٥، ولتحديدهما فإنَّ

ترتيبَ العددِ الأوّلِ = $\frac{\text{عددَ القيمِ}}{٢}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ، إذن: العددُ الثّالثُ هو ٢٣

ترتيبَ العددِ الثّاني = $\frac{\text{عددَ القيمِ}}{٢}$ + ١ = $\frac{٦}{٢}$ + ١ = ٣ + ١ = ٤،

إذنْ العددُ الرّابعُ هو ٢٥

إذا كانَ عددُ القيمِ زوجيًّا فإنَّ الوسيطَ بعدَ ترتيبِ القيمِ تصاعديًّا، أو تنازليًّا هو المتوسطُ الحسابيُّ للعددينِ اللذينِ ترتيبهما هو:

$\frac{\text{عددُ القيمِ}}{٢}$ ، $\frac{\text{عددُ القيمِ}}{٢}$ + ١

تدريب ١

جِدِ الوسيطَ للقيمِ الآتيةِ:

١) ٢٨، ٥٤، ٨٢، ٦٥، ٤٥، ٣٣، ٦٦، ٤٥ ، ٣٨، ٥٥، ٤٢

٢) ١٢٢، ١٢٤، ٩٨، ١١٣، ١٢٥، ١١٨، ١٢٤، ١٣٢، ١٢٨، ١٢٩

تدريب ٢

إذا كانتْ رواتبُ موظّفي إحدى الشركاتِ على النّحو الآتي:

٤٢٠، ٤٠٠، ٣٥٠، ٣٣٣، ٣٩٠، ٤٢٠، ٥٤٠، ٤٨٠، ١٨٠، ٢٢٠ احسبِ الوسيطَ لهذهِ الرواتبِ.

تدريب ٣

جِدِ الوسيطَ لكمياتِ الأمطارِ الواردةِ في بدايةِ الدّرسِ.

ثانيًا: المنوالُ

القائمةُ الآتيةُ تمثّلُ أنواعَ الحلوياتِ المفضّلةِ لطلبةٍ عددهم ١٥ طالبًا.

كيكٌ، كنافةٌ، هريسةٌ، كنافةٌ، هريسةٌ، كنافةٌ، كيكٌ، كنافةٌ، كنافةٌ، كنافةٌ، هريسةٌ، كيكٌ كنافةٌ، هريسةٌ، كنافةٌ

ما نوعُ الحلوياتِ التي يفضّلها أكبرُ عددٍ مِنَ الطلبةِ؟

نلاحُظ أنَّ الكنافةَ يفضّلها أكبرُ عددٍ مِنَ الطلبةِ، ويُسمّى هذا **منوالا**.

نشاط

ما لونُ العيونِ السائدِ لزملائكَ في الصّفِّ؟ ماذا تسميّهِ؟

اكتبْ تعريفًا للمنوالِ.

مثالُ (٢)

إذا كانتْ علاماتُ ١٠ طلابٍ في أحدِ الامتحاناتِ على النّحو الآتي:

١٢، ١٥، ٨، ٩، ١٣، ١٢، ١٥، ١٨، ١٥، ١٤. فَجدِ المنوالَ.

الحلُّ

نلاحظُ أنَّ العلامةَ ١٥ هي الأكثرُ تكرارًا بينَ العلاماتِ السابقةِ، وبذلكَ فإنَّ المنوالَ هو ١٥.

تدريبُ ٤

جِدِ المنوالَ للقيمِ الآتيةِ:

٨٥، ٩٢، ٧٩، ٦٨، ٩٩، ١١٥، ٧٩، ٧٩، ٦٨، ٩١، ٦٨، ٧٩، ٨٨، ٧٩

تدريبُ ٥

اذكرْ مثالًا على:

١) بياناتٍ ليس لها منوالٌ.

٢) بياناتٍ لها منوالانِ.

فكّر

- إذا أردتَ أنْ تعرفَ ترتيبَ علامتك في علاماتِ الرّياضيّاتِ بين علاماتِ طلبةِ صفكَ، ما المقياسُ الإحصائيُّ الأنسبُ الذي تستخدمهُ؟
- إذا أردتَ أنْ تعرفَ أيَّ العلاماتِ كانتْ أكثرَ تكرارًا في امتحانِ الرّياضيّاتِ لطلبة الصفِ السابعِ، ما المقياسُ الإحصائيُّ الأنسبُ الذي تستخدمهُ؟

تمارينُ ومسائلُ

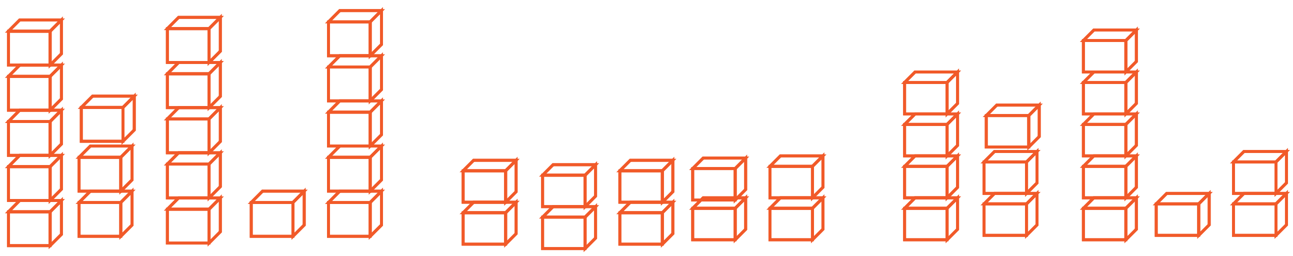
١) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ، والمنوالَ، لكلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٣٠، ٢٥، ١٤، ٢٥، ٢٤، ١٩، ٢٦، ٢٥، ٢٠

ب) ٧،٨، ٩،٦، ٣،٥، ١٠،٣، ٣،٥، ١،٣

٢) صِلْ بخطٍ بينَ الجُملِ الآتيةِ، والشّكلِ المناسبِ:

المتوسطُ الحسابيُّ=٢   المنوالُ = ٥   الوسيطُ = ٣



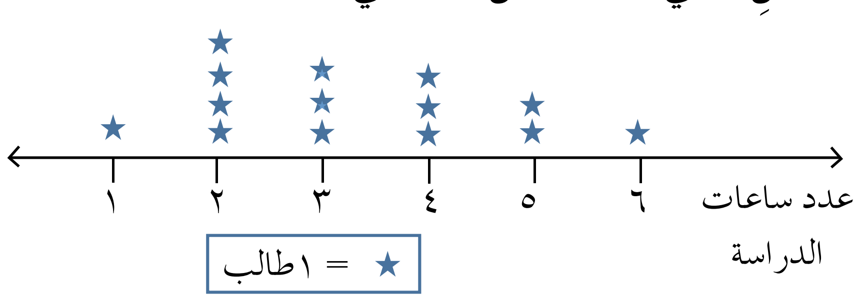
(١)   (٢)   (٣)

٣) اعتمدِ البياناتِ الممثلةَ بالشّكلِ الآتي لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

أ) المتوسطِ الحسابيِّ.

ب) الوسيطِ.

جـ) المنوالِ.



٤) اكتب عددًا في كلٍّ □ ممّا يأتي:

أ) ٢، ٤، ٦، ٧، ٤، ٥، □   حيثُ يكونُ المنوالُ = ٤

ب) ٥، ١٠، ٠، ٩، □، ١٥   حيثُ يكونُ المتوسطُ الحسابيُّ = ٧

جـ) ٨، ٦، □، ١٥، ١٣   حيثُ يكونُ الوسيطُ = ٨

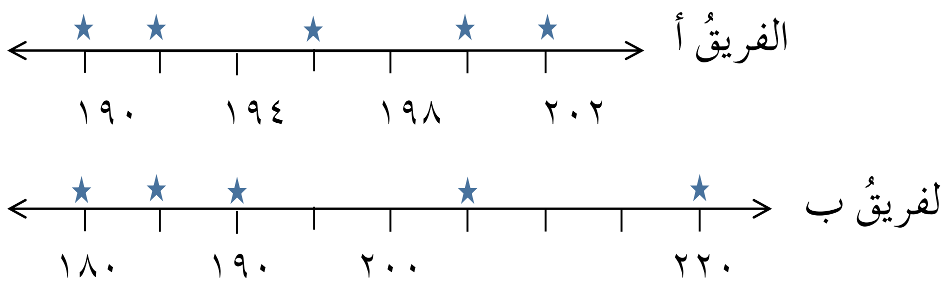
٥) اذا كانتْ علاماتُ أحدِ الطلبةِ في ٦ مباحثَ (النهاية العظمى لكلٍّ منها ١٠٠ علامة) هي: ٩١، ٨٢، ٨٣، ٩٦، ٧٤، ٨٨، وتقدّمَ لامتحانٍ في مبحثٍ آخرَ نهايةُ علامتهِ العظمى ١٠٠، فأصبحَ الوسيطُ لعلاماتهِ يساوي المنوالَ، ما العلامةُ التي حصلَ عليها في ذلكَ المبحثِ؟

مقاييسُ التشتّتِ

النتاجات

- تتعرفُ على مقاييسِ التّشتتِ.
- تحسبُ المـدى والانحـرافَ المعيـاريَّ، والتّباينَ لبيانـاتٍ عـدديّةٍ.

إذا كانتْ أطوالُ لاعبي فريقينِ لكرةِ السلّةِ بالسنتيمترَ كما في الشّكلينِ الآتيين:



١) احسبِ المتوسَطَ الحسابيَّ لأطوالِ لاعبي كلِّ فريقٍ مِنَ الفريقينِ، ماذا تلاحظُ؟

٢) قارنْ بينَ المتوسطِ الحسابيِّ، وطولِ أطولِ لاعبٍ، وطولِ أقصرِ لاعبٍ في كلِّ فريقٍ مِنَ الفريقينِ. ماذا تلاحظُ؟

نلاحظُ في المثالِ السابقِ أنَّ المتوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ لاعبي الفريقِ (أ) يساوي المتوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ لاعبي الفريقِ (ب)، رغمَ اختلافِ أطوالِ لاعبي الفريقينِ، مما يعني أنهُ قد تتساوى بعضُ مقاييسِ النّزعةِ المركزيةِ لتوزيعَينِ أو أكثرَ. أطوالُ لاعبي الفريقِ (أ) تنحصرُ بينَ ١٩٠، ٢٠٢ ، بينما تنحصرُ أطوالُ لاعبي الفريقِ (ب) بين ١٨٠، ٢٢٠ وهذا يعني أنَّ أطوالَ لاعبي الفريقِ (ب) أكثرُ تباعدًا من أطوالِ لاعبي الفريقِ (أ). ولتحديدِ مدى تقاربِ، أو تجانسِ البياناتِ المعطاةِ، نحنُ بحاجةٍ لمقاييسَ

أخرى غيرِ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ، والتي تُسمّى (مقاييسَ التشتتِ)، وهي المدى، والانحرافُ المعياريُّ، والتّباينُ.

المدى: هو الفرقُ بينَ أكبرِ قيمةٍ، وأصغرِ قيمةٍ، أيْ أنّ:
المدى = أكبرَ قيمةٍ – أصغرِ قيمةٍ.

مثالُ (١)

إذا كانتْ رواتبُ موظفي شركةٍ على النّحو الآتي: ٣٥٠، ٣٨٨، ١٥٠، ٤٩٠، ٢٥٠، ٣٧٩، ٢٩٥، ٣٠٠، ٢٥٥، ٢١٥، ٣٥٢، ٣٤٥، ٢٢٥

فجدِ المدى للرّواتبِ.

الحلُّ

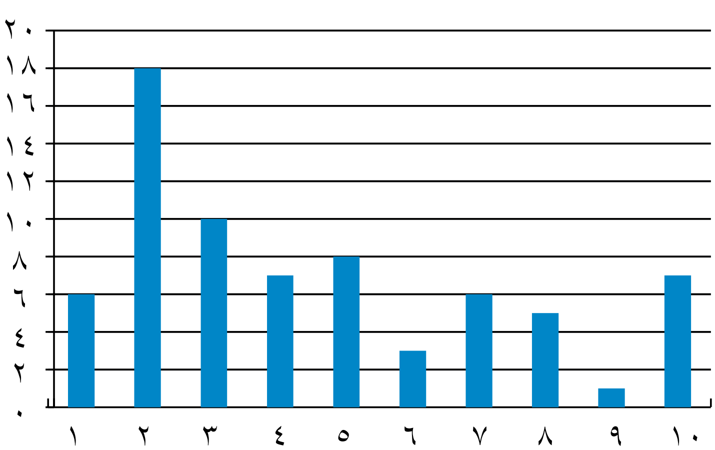
أكبرُ قيمةٍ = ٤٩٠ دينارًا

أصغرُ قيمةٍ = ١٥٠ دينارًا.

مدى الرّواتب = ٤٩٠–١٥٠=٣٤٠ دينارًا.

تدريبُ ١

اذا كانتْ علاماتُ ١٠ طلابٍ في أحدِ المباحثِ كما في الشّكلِ المجاورِ:



١) جِدِ المدى.

٢) احذفْ أصغرَ قيمةٍ، وأكبرَ قيمةٍ واحسبِ المدى مِنْ جديدٍ، وقارنهُ بالمدى قبلَ الحذفِ.

تلاحظُ مِنْ تعريفِ المدى، أنّهُ يمتازُ بسهولةِ حسابِهِ، ويُعطي فكرةً سريعةً عنْ تباعدِ، أو تقاربِ المشاهداتِ، ولكنّهُ لا يَعكسُ أثَرَ جميعِ المشاهداتِ، لأنّ حسابهُ يعتمدُ على أكبرِ قيمةٍ، وأصغرِ قيمةٍ فقطْ.

لذلك؛ نلجأُ إلى مقياسٍ آخرَ وهو الانحرافُ المعياريُّ.

الانحرافُ المعياريُّ

هو مقياسٌ مِنْ مقاييس التّشتّتِ، يقيسُ مدى تباعدِ القيمِ، أو تقاربها عنْ متوسطها الحسابيِّ.

الانحراف المعياريُّ (ع) لعيّنةٍ إحصائيةٍ على النحو الآتي:

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع مربعات انحرافات القيمِ عن متوسطها الحسابي}}{\text{عددِ القِيمِ} - ١}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$ ، حيث $\overline{س}$ ترمزُ للمتوسَطِ الحسابيِّ.

$س - \overline{س}$ تمثّلُ انحرافَ القيمةِ س عنِ المتوسَطِ الحسابيِّ.

ن يمثّلُ عددَ القِيَم

$\sum$ رمزُ المجموعِ.

مثالُ (٢)

جِدِ الانحرافَ المعياريَّ للقيمِ الآتيةِ: ١٢، ١٠،١٥، ٢٥، ١٨

الحلُّ

١) نجدُ المتوسطَ الحسابيَّ للقيم:

$$\overline{س} = \frac{\text{مجموعَ القِيَمِ}}{\text{عددِ القِيَمِ}} = \frac{١٢ + ١٠ + ١٥ + ٢٥ + ١٨}{٥} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$$

٢) نكوّنُ جدولًا بثلاثةِ أعمدةٍ: الأوّلُ يحوي قِيَمَ س، الثّاني يحوي ناتجَ $(س - \overline{س})$، أمّا العمودُ الثّالثُ فإنهُ يحوي ناتجَ $(س - \overline{س})^٢$.

س	$(س - \overline{س})$	$(س - \overline{س})^٢$
١٢	-٤	١٦
١٠	-٦	٣٦
١٥	-١	١
٢٥	٩	٨١
١٨	٢	٤
المجموعُ	صفرٌ (لماذا؟)	١٣٨

٣) نطبّقُ القانونَ:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢}{ن - ١}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١٣٨}{٥ - ١}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١٣٨}{٤}} = \sqrt{٣٤{,}٥} \approx ٥{,}٨٧$$

التّباينُ: مقياسٌ مِنْ مقاييسِ التّشتّتِ، وهو يمثّلُ مربّعَ الانحرافِ المعياريِّ، حيثُ:

$$التّباينُ = ع^٢ = \frac{\sum (س - \overline{س})^٢}{ن - ١}$$

مثالُ (٣)

احسبِ التّباينَ للقيمِ في المثالِ السّابقِ.

الحلّ

$$\text{التّباينُ} = \text{ع}^{٢} = \frac{\sum(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}}{\text{ن} - ١} = ٣٤,٥$$

تدريبُ ٢

إذا كانتْ أوزانُ (٦) طلابٍ: ٤٥، ٤٠، ٣٠، ٣٥، ٤٢، ٣٠ فجدْ كلاًّ ممّا يأتي:

١) الانحرافَ المعياريَّ لأوزانِ الطّلبةِ

٢) التباينَ لأوزانِ الطّلبةِ.

تدريبُ ٣

للبياناتِ : ٧، ٧، ٧، ٧، ٧ جِدِ:

١) المدى.

٢) الانحرافَ المعياريَّ.

٣) التّباينَ.

٤) ماذا تستنتجُ؟

تدريبُ ٤

ناقشْ هذهِ العبارةَ: قالتْ دانةُ " كلما زادتْ قيمةُ الانحرافِ المعياريِّ، كانتِ البياناتُ أكثرَ تشتُّتًا.

تمارينُ ومسائلُ

١) إذا كانَ عددُ السّاعاتِ اليوميّةِ التي يَقضيها ٧ طلابٍ في الثّانويةِ العامّةِ في الدّراسةِ ممثَّلةً بالجدولِ الآتي:

رقمُ الطّالبِ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عددُ السّاعاتِ	٨	٣	٥	٧	٢	٤	٦

جِدِ:

أ) المدى.

ب) الانحرافَ المعياريَّ.

جـ) التّباينَ.

٢) إذا كانتْ علاماتُ ٥ طلابٍ مِنَ الصّفِّ السّابعِ في امتحانٍ علامتهُ العظمى مِنْ ٢٠ هي: ١٥، ١٦، ١٣، ١٤، ١٢

وعلاماتُ ٥ طالباتٍ مِنَ الصّفِّ السّابعِ في نَفْسِ الامتحانِ هي: ٣، ١٠، ١٨، ١٩، ٢٠، فَجِدْ كلاًّ ممّا يأتي:

أ) المدى لعلاماتِ الذّكورِ.

ب) المدى لعلاماتِ الإناثِ.

جـ) الانحرافَ المعياريّ لعلاماتِ الذّكورِ.

د) الانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الإناثِ.

هـ) ماذا تلاحظُ؟

٣) إذا كانتْ كتلُ ٦ أشخاصٍ بالكيلوغرام كما يأتي: ٥٥، ٧٠، ٨٦، ٤٠، ٦٥، ٦٠، فَجِدْ كلاً ممّا يأتي:

أ) الانحرافَ المعياريَّ.

ب) احذفْ أكبرَ كتلةٍ، وأقلَّ كتلةٍ، ثُمّ جِدِ الانحرافَ المعياريَّ.

جـ) قارنْ بينَ الإجابتينِ في الفرعَينِ أ ، ب.

د) اذا أُضيفتْ قِيَمٌ محصورةٌ بينَ أكبرِ قيمةٍ، وأصغرِ قيمةٍ، هلْ تختلفُ قيمةُ المدى؟ هلْ تختلفُ قيمة المتوسطِ الحسابيِّ؟ هلْ تختلفُ قيمةُ الانحرافِ المعياريِّ؟ برّرْ إجابتكَ.

مراجعة

١) إذا كانَ عددُ الأهدافِ التي سجَّلها فريقُ كرةِ السّلةِ لإحدى المدارسِ في ٥ مبارياتٍ خاضها في دوريِّ المدارسِ على النّحو الآتي: ٥٥، ٥٠، ٥٥، ٤٦، ٥٤، فَجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

أ) المتوسطَ الحسابيِّ.

ب) الوسيطَ.

جـ) المنوالِ.

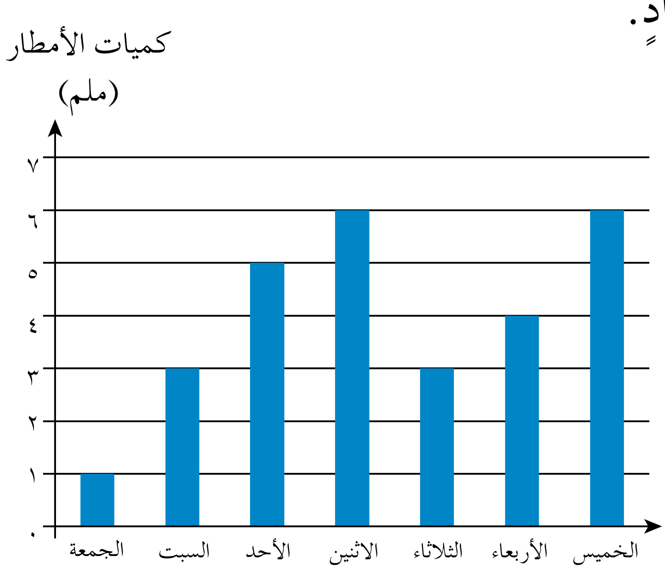
٢) تمثّلُ القِيَمُ الآتيةُ علاماتِ الطالبِ زيادٍ في(٦) اختباراتٍ قصيرةٍ في مبحثِ الرّياضيّاتِ، النهايةُ العظمى لكلٍّ منها (١٠) علاماتٍ: ١٠، ٩، ١، ٧، ٦، ٣، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:

أ) المدى لعلاماتِ زيادٍ.

ب) الانحرافَ المعياريِّ لعلاماتِ زيادٍ.

جـ)التباينَ لعلاماتِ زيادٍ.

٣) معتمدًا الشّكلَ المجاورَ الذي يمثّلُ كمياتِ الأمطارِ بالملميتر، التي هطلتْ على مدارِ أسبوعٍ في مدينةِ إربدَ، احسبْ كلًّا ممّا يأتي:



أ) المتوسطَ الحسابيَّ لكمياتِ الأمطارِ.

ب) المدى لكمياتِ الأمطارِ.

جـ) الانحرافَ المعياريَّ لكمياتِ الأمطارِ.

٤) للأعدادِ ٤٠، ٢٠، ٦٠، أضِفْ عددينِ، حيثُ يصبحُ كلٌّ مِنَ المتوسطِ، والوسيطِ، والمنوالِ يساوي ٦٠.

٥) اكتبْ عددًا في كلِّ $\boxed{}$ ممّا يأتي:

أ) ١٤، ١٢، ٩، ٥، ٧، $\boxed{}$ ، حيثُ يصبحُ المدى = ١٤.

ب) ١٥، ٢٨، ٣٠، ، $\boxed{}$ ، ١٧، حيثُ يصبحُ المتوسطُ الحسابيُّ = ٢٣

جـ) ١٠، ٥، $\boxed{}$ ، ١٣، ١١ ، حيثُ يصبحُ الوسيطُ = ١١

٦) مجموعةٌ تتكونُ مِنْ ٥ أعدادٍ، المدى لها ٩، والوسيطُ ١٢، والمنوالُ ١٥، والمتوسّطُ الحسابيُّ ١١. ما هذهِ الأعدادُ؟

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ مِنْ ٥ فقراتٍ مِنْ نوعِ الاختيارِ مِنْ متعدّدٍ، كلّ فقرةٍ لها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقط صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ في ما يأتي:

(١) وسيطُ القِيَمِ: ٢، ٧، ٦، ٨، ١، ٩، ٥ يساوي:

أ) ٥ ب) ٦ جـ) ٧ د) ٢

(٢) مِنوالُ القِيَمِ: ٢٥، ٣٥، ٢٥، ٥٣، ٣٥٠، ٢٠ يساوي:

أ) ٢٥ ب) ٣٥ جـ) ٣٥٠ د) ٥٢

(٣) الانحرافُ المعياريُّ للقِيَمِ: ٤، ٤، ٤، ٤، ٤ يساوي:

أ) ٤ ب) ٠ جـ) ٢٠ د) ٨

(٤) مدى القِيَمِ: ٠، ١، ٠، ٠، ١، ٠، ٠، ١ يساوي:

أ) ٠ ب) ١٠ جـ) ١ د) −١

(٥) إذا كانَ التّباينُ لمجموعةٍ مِنَ القِيَمِ يساوي ١٦، فإنَّ الانحرافَ المعياريَّ لها يساوي:

أ) ٨ ب) ٢٥٦ جـ) ٣٢ د) ٤

٢) إذا كانتْ كتلُ ٥ أطفالٍ بالكيلو غرام كما يأتي:

١٥، ١٠، ٢٥، ١٥، ٢٥ فَجِدِ:

أ) المتوسطَ الحسابيَّ.

ب) الوسيطَ.

جـ) الانحرافَ المعياريَّ.

٣) إذا كانتْ علاماتُ الطالبةِ جمانةَ في ٦ اختباراتٍ قصيرةٍ في مادّةِ الريّاضيّاتِ، (النهايةُ العظمى لكلٍّ منها ١٠ علاماتٍ) هي: ٩، ٧، ١٠، ٦، ١، ٨، فأجبْ عن كلٍّ ممّا يأتي:

أ) جِدْ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ.

ب) إذا استثنيتَ أقلَّ علامةٍ حصلتْ عليها الطالبةُ جمانةُ، فجِدْ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ بعدَ الاستثناءِ.

جـ) قارنْ بينَ قيمتَي الانحرافِ المعياريِّ قبلَ الاستثناءِ، وبعدهُ.

٤) اعطِ مثالًا لبياناتٍ يكونُ فيها المتوسطُ الحسابيُّ = الوسيطَ = المنوالَ.

٥) اعطِ مثالًا لبياناتٍ لها منوالانِ.

تم بحمد الله تعالى